УДК 519.6:531.19 DOI: 10.18698/2308-6033-2023-7-2287

Анализ устойчивости по Якоби и восстановление параметров двойного маятника с демпфированием

© А.В. Сулимов

Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Севастополе, Севастополь, 299000, Россия
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

На основе теории Косамби – Картана – Черна, позволяющей определять геометрические структуры и пять геометрических инвариантов динамической системы, проведен анализ устойчивости по Якоби двойного маятника с демпфированием. Собственные значения второго инварианта (тензора кривизны отклонения) дают оценку устойчивости системы по Якоби, связанную с мерой нечувствительности к возмущениям собственно системы и окружающей среды. Подобные исследования актуальны в приложениях, где требуется определение областей устойчивости системы по Ляпунову и по Якоби одновременно. Сформулирована обратная задача восстановления параметров системы по косвенной информации, представленной собственными значениями тензора кривизны отклонения. Для двойного маятника с демпфированием доказаны условия устойчивости по Якоби в терминах его свободных параметров. Решение обратной задачи восстановления параметров маятника получено с использованием оптимизационного подхода. При минимизации регуляризованной критериальной функции применяется новый гибридный алгоритм глобальной оптимизации. Приведен численный пример движения двойного маятника с демпфированием.

Ключевые слова: *двойной маятник, линейно-вязкое сопротивление, устойчивость по Якоби, восстановление параметров, критериальная функция, глобальная оптимизация, гибридный алгоритм*

Введение. Исследования устойчивости динамических систем в современных условиях могут включать в себя применение теории Косамби — Картана — Черна (теории ККЧ) [1, 2]. При этом реализуется дифференциально-геометрический подход к вариационным дифференциальным уравнениям, описывающим отклонение целой траектории системы от ближайших траекторий. Геометрическое описание, основанное на теории ККЧ, позволяет определить пять геометрических инвариантов системы. Собственные значения второго инварианта — тензора кривизны отклонения — дают оценку устойчивости системы по Якоби. Анализ устойчивости системы в данном контексте связан с изучением ее робастности как меры нечувствительности и адаптации к изменению параметров собственно системы и окружающей среды. Применение теории ККЧ актуально в практических приложениях, где для системы требуется идентифицировать области, в которых имеют место одновременно устойчивость по Ляпунову и устойчивость по Якоби [3].

Цель работы — формулировка критериев устойчивости системы с двумя степенями свободы (плоского двойного маятника с демпфированием) по Якоби в терминах ее свободных параметров. Предложена постановка обратной задачи восстановления параметров системы по заданным собственным значениям тензора кривизны отклонения и приведены результаты ее численного решения. Реализуемый подход основан на применении теории ККЧ, теории обратных задач, методов глобальной оптимизации.

Геометрические инварианты и устойчивость системы по Якоби. Краткий обзор теории ККЧ дан в работах [1, 2]. Уравнения движения *n*-мерной системы (нелинейные в общем случае) могут быть получены с использованием уравнений Эйлера — Лагранжа и представлены в виде [2]

$$\ddot{x}^i + 2G^i(x^j, \dot{x}^j, t) = 0, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{1}$$

где локальная система координат $(x^i,\ \dot{x}^i,\ t)$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ введена на открытом связном подмножестве Ω евклидова $(2n+1)$-мерного пространства $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^1$; $x^i = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $\dot{x}^i = dx^i / dt$, $\ddot{x}^i = d^2x^i / dt^2$; t — время; каждая функция $G^i(x^i,\ \dot{x}^i,\ t)$ имеет класс гладкости C^∞ в окрестности некоторых начальных условий $((x)_0, (\dot{x})_0, t_0)$ на Ω. Рассматриваются задачи определения пяти геометрических инвариантов системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (1) при преобразованиях координат: $\tilde{t} = t$, $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $i \in \{1,\ 2,\ \ldots, n\}$. Если преобразования координат являются несингулярными, то ККЧ-ковариантная производная векторного поля $\xi^i(x)$ на Ω определяется в виде [1, 2]

$$\frac{D\xi^i}{dt} = \frac{d\xi^i}{dt} + N^i_j \xi^j \tag{2}$$

(используется соглашение Эйнштейна о суммировании).

В случае $\dot{x}^i = \xi^i$ имеет место $N^i_j \dot{x}^j - 2G^i = -\varepsilon^i$. Контравариантное векторное поле ε^i на Ω называется первым ККЧ-инвариантом.

Если рассматривается случай, когда траектории $\tilde{x}^i(t) = x^i(t) + \eta\xi^i(t)$ (здесь η — малая величина) близки к траекториям системы уравнений (1), то при $\eta \to 0$ указанная система уравнений преобразуется к виду [1, 2]

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2} + 2N_j^i \frac{d\xi^j}{dt} + 2Z_j^i \xi^j = 0, \qquad (3)$$

где Z_j^i — кривизна нуль-связности, $Z_j^i = \dfrac{\partial G^i}{\partial x^j}$.

Уравнение (3) с использованием (2) можно представить в ковариантной форме [2]

$$\frac{D^2\xi^i}{dt^2} = P_j^i \xi^j.$$

Здесь P_j^i — второй геометрический инвариант (тензор кривизны отклонения):

$$P_j^i = \frac{\partial N_j^i}{\partial x^k}\dot{x}^k - 2G^k G_{jk}^i + N_k^i N_j^k - 2Z_j^i,$$

коэффициенты связности Бервальда представлены как $G_{jk}^i = \dfrac{\partial^2 G^i}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k}$.

В рамках теории ККЧ третий, четвертый и пятый геометрические инварианты системы (1) определяются, согласно [1], так:

$$P_{jk}^i = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial P_j^i}{\partial y^k} - \frac{\partial P_k^i}{\partial y^j}\right);$$

$$P_{jkl}^i = \frac{\partial P_{jk}^i}{\partial y^l};$$

$$D_{jkl}^i = \frac{\partial G_{jk}^i}{\partial y^l}.$$

Третий инвариант P_{jk}^i может быть интерпретирован как тензор кручения. Четвертый P_{jkl}^i и пятый D_{jkl}^i инварианты называются тензором кривизны Римана — Кристоффеля и тензором Дугласа соответственно. В общем случае указанные инварианты могут быть использованы для описания геометрических свойств систем дифференциальных уравнений второго порядка.

При анализе устойчивости по Якоби динамических систем с двумя степенями свободы используются собственные значения тензора P_j^i, определенные в виде $\lambda_{1,2} = \dfrac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$, где $\tau = P_1^1 + P_2^2$; $\Delta = P_1^1 P_2^2 - P_2^1 P_1^2$.