МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Учебное пособие для вузов

Составитель
И. Д. Коструб

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2014

ВВЕДЕНИЕ

Очень широкий класс задач составляют экстремальные задачи или задачи оптимизации, в которых требуется найти значения параметров или функций, реализующих минимум или максимум некоторой зависящей от них величины. Во многих инженерных задачах желательно найти максимум меры выполнения или минимум стоимости. Кроме того, можно по крайней мере приблизить решения многих задач, выбрав неизвестные значения параметров или функций так, чтобы они давали минимум ошибки в пробных решениях; иногда такой приём позволяет применить для решения данной задачи мощные методы числовых приближений (подробнее см. [5]).

Данное учебное пособие написано по курсу «Методы оптимизации и исследование операций» и посвящено различным темам: линейное программирование, нелинейное программирование в задачах, содержащих несколько переменных с ограничениями и без них, а также решению задач курса «Исследование операций». Предназначено пособие для организации аудиторной и самостоятельной работы студентов. В каждом разделе приводятся теоретические сведения, необходимые для решения сформулированных задач, образцы решения ряда задач, а также упражнения для самостоятельной работы. Для самопроверки на некоторые задачи приведены ответы.

При написании пособия использовались примеры и задачи из литературы, приведённой в конце (особо отметим [1], [6] и [9]), а также лекции профессора Задорожнего В. Г., которому выражаю благодарность за полезные замечания.

$J''(u) = -2 < 0$. Теперь посчитаем значение функции $J(u_1, u_2) = u_1 \cdot u_2$ в точке $(A/2; A/2)$. Оно равно

$$J(A/2; A/2) = A^2/4. \tag{8}$$

Проведённые рассуждения проиллюстрированы на рис. 2.

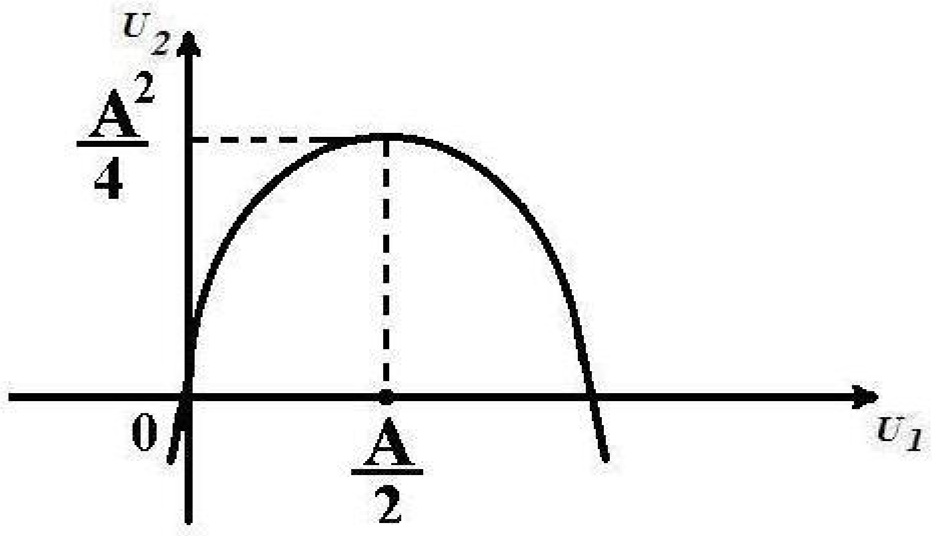

Рис. 2

3. ***Формализовать и решить задачу.*** Вписать в круг прямоугольник наибольшей площади.

Решение. Окружность описывается уравнением

$$u_1^2 + u_2^2 = r^2. \tag{9}$$

Сделаем для удобства чертёж. Направим оси координат как на рисунке 3.

Ясно, что площадь прямоугольника ABCD вычисляется по формуле

$$S_{прям.} = 4 \cdot u_1 \cdot u_2. \tag{10}$$

Получаем задачу

$$J_1(u_1, u_2) = 4 \cdot u_1 \cdot u_2 \to \sup$$

при условиях, что координаты u_1 и u_2 подчинены ограничениям

$$
\begin{aligned}
&J_2 = u_1^{\,2} + u_2^{\,2} - r^2 = 0,\\
&J_3(u_1, u_2) = u_1 \geq 0,\\
&J_4(u_1, u_2) = u_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Изменим два последних условия и тогда исходная задача примет вид задачи с ограничением

$$
\begin{aligned}
&J(u_1, u_2) = 4 \cdot u_1 \cdot u_2 \to \sup,\\
&u_1^{\,2} + u_2^{\,2} = r^2.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

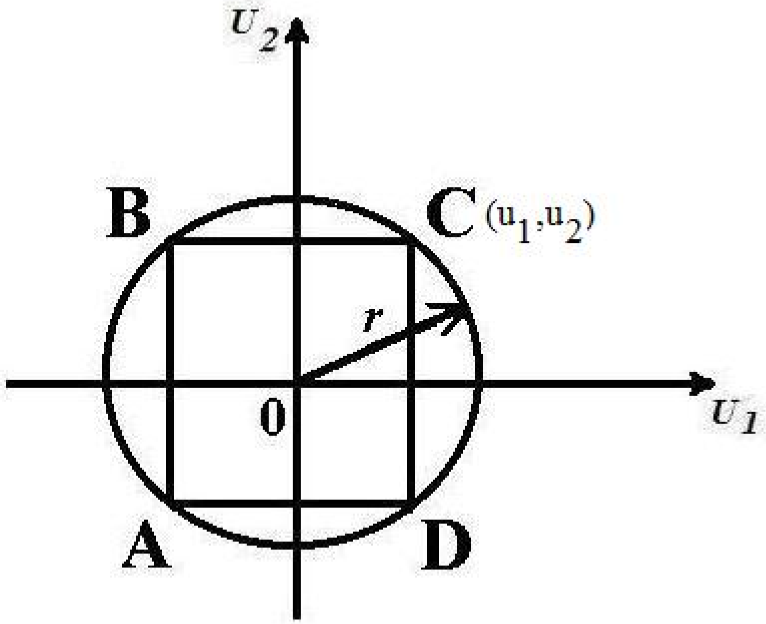

Рис. 3

4. ***Формализовать и решить задачу.*** В данный шар вписать прямой конус с наибольшей боковой поверхностью.

Решение. Хорошо известно, что каждый шар определяется своим радиусом. Обозначим его через R. Известно также, что площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле

$$
S_{б.п.} = \pi r L, \tag{12}
$$

где r – радиус основания конуса, L – длина его образующей.

В данном случае удобно пояснять решение поставленной задачи на чертеже (см. рис. 4).

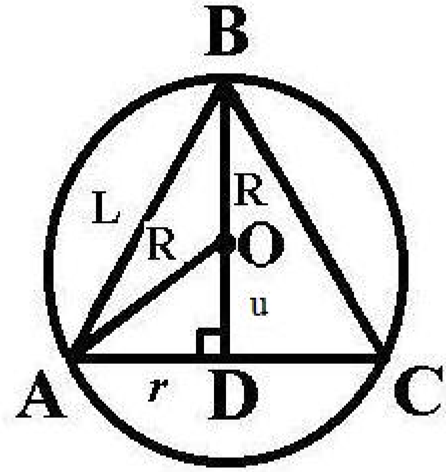

Рис. 4

Обозначим через H длину высоты BD треугольника ABC. Тогда величину u можно представить следующим образом $u = H - R$.

Наша задача на данном этапе заключается в том, чтобы представить площадь боковой поверхности конуса как функцию одной переменной, исследовать её на максимум известным нам способом. Из треугольника AOD выразим радиус основания конуса. Он равен

$$r = \sqrt{R^2 - (H - R)^2}. \tag{13}$$

Из треугольника ABD вычислим длину образующей конуса. Получим

$$L = \sqrt{r^2 + H^2} = \sqrt{2HR}. \tag{14}$$

Подставим теперь представления (13) и (14) в функцию (12). Она примет вид функции переменной H. А именно,

$$S_{б.п.}(H) = \pi\sqrt{2HR - H^2}\sqrt{2HR}. \tag{15}$$

Исследуем её на экстремум. Посчитаем производную по H. Она равна

$$S_{б.п.}(H) = \pi\frac{8HR^2 - 6H^2R}{2\sqrt{4H^2R^2 - 2H^3R}}.$$