МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Методическое пособие по курсу ДС.00 “Теория автоматического управления” для студентов специальности 010200 — Прикладная математика и информатика

ВОРОНЕЖ
2003

Содержание

Введение

Интегральные оценки качества являются косвенными показателями, позволяющими по переходной составляющей ошибки системы регулирования исследовать характер протекания переходного процесса (перерегулирование, быстродействие, степень колебательности, коэффициент затухания, оптимальные параметры и т.п.). Находят применение линейные и квадратичные интегральные оценки.

1. Методика применения интегральных оценок

Линейными интегральными оценками называют оценки вида

$$\boxed{I_k(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha t} t^k \varepsilon(t)\, dt,} \tag{1}$$

где $\varepsilon(t)$ — переходная составляющая ошибки регулирования, α — вещественный неотрицательный параметр, $k \in \mathbb{Z}_0$ — целое неотрицательное число. При $\alpha = 0$ оценка (1) представляет собой *момент k-го порядка* функции $\varepsilon(t)$, т.е.

$$\boxed{I_k = I_k(0) = \int\limits_0^\infty t^k \varepsilon(t)\, dt.} \tag{2}$$

Квадратичными оценками называют следующие интегралы:

$$\boxed{J_k = \int\limits_0^\infty \sum_{i=0}^{k} \left[\tau_i^i \varepsilon^{(i)}(t)\right]^2 dt.}$$

Из соотношения (5) сразу следует, что $\varepsilon(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$a_0\varepsilon^{(n)}(t) + a_1\varepsilon^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}\dot{\varepsilon}(t) + a_n\varepsilon(t) = \\ = b_0\delta^{(m)}(t) + b_1\delta^{(m-1)}(t) + \ldots + b_{m-1}\dot{\delta}(t) + b_m\delta(t) \quad (7)$$

с нулевыми начальными условиями, где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. Однако на практике переходную составляющую ошибки $\varepsilon(t)$ удобнее рассматривать как решение однородного уравнения

$$a_0\varepsilon^{(n)}(t) + a_1\varepsilon^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}\dot{\varepsilon}(t) + a_n\varepsilon(t) = 0 \quad (8)$$

при ненулевых начальных условиях

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_0,\ \dot{\varepsilon}(0) = \varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon^{(n-1)}(0) = \varepsilon_{n-1}. \quad (9)$$

Допустим, что $n - m = l > 0$. Выразим начальные значения ε_i через коэффициенты дифференциального уравнения (7). Применяя к уравнениям (7) и (8) теорему о дифференцировании оригинала, соответственно получаем

$$\sum_{k=0}^{n} a_k s^{n-k} E(s) = \sum_{r=0}^{m} b_r s^{m-r},$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left[s^{n-k} E(s) - \sum_{i=1}^{n-k} s^{n-k-i} \varepsilon^{(i-1)}(0) \right] = 0.$$

Отсюда сразу вытекает условие

$$\sum_{r=0}^{m} b_r s^{m-r} = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{n-k} s^{n-k-i} \varepsilon_i.$$

Нетрудно проверить, что

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{n-k} s^{n-k-i} \varepsilon_i = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \sum_{i=1}^{n-k} s^{n-k-i} \varepsilon_i = \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} \sum_{i=0}^{k} a_{k-i}\varepsilon_i.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s, окончательно находим

$$\varepsilon_r = \begin{cases} 0, & r = \overline{0, l-2}, \\ \dfrac{1}{a_0}\left[b_{r-l+1} + \sum\limits_{k=0}^{r-1} a_{r-k}\varepsilon_k \right], & r = \overline{l-1, l-1+m}. \end{cases} \quad (10)$$

Рассмотрим далее метод аналитического вычисления интеграла I_0, предложенный академиком В. С. Кулебакиным [3], для заданного дифференциального уравнения (8) с начальными условиями (9). Делая подстановку значения $\varepsilon(t)$ из уравнения (8), при $a_n \neq 0$ имеем

$$I_0 = \int_0^\infty \varepsilon(t)\,dt = -\frac{1}{a_n}\int_0^\infty \left[a_0\varepsilon^{(n)}(t) + \ldots + a_{n-1}\dot{\varepsilon}(t)\right]dt =$$

$$= -\frac{1}{a_n}\left[a_0\varepsilon^{(n-1)}(t) + a_1\varepsilon^{(n-2)}(t) + \ldots + a_{n-2}\dot{\varepsilon}(t) + a_{n-1}\varepsilon(t)\right]_0^\infty .$$

Будем предполагать, что при $t = \infty$ переходный процесс закончился и регулируемая величина приняла установившееся значение. Тогда

$$\varepsilon^{(n-1)}(t)\big|_{t=\infty} = \varepsilon^{(n-2)}(t)\big|_{t=\infty} = \ldots = \dot{\varepsilon}(t)\big|_{t=\infty} = \varepsilon(t)\big|_{t=\infty} = 0.$$

Таким образом, значение I_0 определяется по формуле

$$\boxed{I_0 = \frac{1}{a_n}\left[a_0\varepsilon_{n-1} + a_1\varepsilon_{n-2} + \ldots + a_{n-2}\varepsilon_1 + a_{n-1}\varepsilon_0\right]} \qquad (11)$$

исходя из заданных начальных значений ε_i и коэффициентов a_r. Поскольку

$$b_r = \sum_{i=0}^{l-1+r} a_{l-1+r-i}\varepsilon_i, \qquad r = \overline{0, m},$$

то

$$b_m = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-1-i}\varepsilon_i$$

и формулы (6) и (11) эквивалентны.

3. Вычисление квадратичных интегральных оценок

Для вычисления интеграла J_0 воспользуемся методом, указанным академиками А. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси в 1909 г. [3]. Пусть задано дифференциальное уравнение (8) с начальными условиями (9). Умножим уравнение (8) поочередно на $\varepsilon^{(r)}(t)$ при $r = \overline{0, n-1}$ и почленно проинтегрируем полученные уравнения

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}\int_0^\infty \varepsilon^{(r)}(t)\varepsilon^{(i)}(t)\,dt = 0, \qquad r = \overline{0, n-1}. \qquad (12)$$

Введем обозначение

$$\Phi_{ri} = \int\limits_{0}^{\infty} \varepsilon^{(r)}(t)\varepsilon^{(i)}(t)\,dt. \tag{13}$$

Учитывая, что $\Phi_{ri} = \Phi_{ir}$, перепишем систему уравнений (12) следующим образом:

$$\begin{cases} a_n\Phi_{00} + a_{n-1}\Phi_{01} + \ldots + a_1\Phi_{0,n-1} + a_0\Phi_{0n} = 0 \\ a_n\Phi_{01} + a_{n-1}\Phi_{11} + \ldots + a_1\Phi_{1,n-1} + a_0\Phi_{1n} = 0 \\ a_n\Phi_{02} + a_{n-1}\Phi_{12} + \ldots + a_1\Phi_{2,n-1} + a_0\Phi_{2n} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n\Phi_{0,n-2} + a_{n-1}\Phi_{1,n-2} + \ldots + a_1\Phi_{n-2,n-1} + a_0\Phi_{n-2,n} = 0 \\ a_n\Phi_{0,n-1} + a_{n-1}\Phi_{1,n-1} + \ldots + a_1\Phi_{n-1,n-1} + a_0\Phi_{n-1,n} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Нетрудно показать, что интеграл $\Phi_{\nu,\nu+\rho}$ в зависимости от четности ρ определяется равенством

$$\Phi_{\nu,\nu+\rho} = \begin{cases} -\Psi_{\nu,\nu+\rho} + (-1)^{\mu} J_{0,\nu+\mu}, & \rho = 2\mu, \\ -\Psi_{\nu,\nu+\rho}, & \rho = 2\mu+1, \end{cases} \tag{15}$$

где

$$J_{0r} = \int\limits_{0}^{\infty} \left[\varepsilon^{(r)}(t)\right]^2 dt, \quad r = \overline{0, n-1}, \tag{16}$$

$$\Psi_{\nu,\nu+\rho} = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{\mu-1} (-1)^i \varepsilon_{\nu+i}\varepsilon_{\nu+\rho-1-i}, & \rho = 2\mu, \\ \sum\limits_{i=0}^{\mu-1} (-1)^i \varepsilon_{\nu+i}\varepsilon_{\nu+\rho-1-i} + \frac{(-1)^{\mu}}{2}\varepsilon^2_{\nu+\mu}, & \rho = 2\mu+1. \end{cases} \tag{17}$$

Подставляя значения интегралов Φ_{ri}, определенные по формуле (15), в (14) получаем следующую систему из n уравнений относительно неиз-