

Министерство образования и науки Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Северный (Арктический) федеральный университет
имени М.В. Ломоносова»

В.Н. Попов

**ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ
ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

*Допущено Северным (Арктическим)
федеральным университетом
имени М.В. Ломоносова
в качестве учебного пособия*

Архангельск

ИПЦ САФУ

УДК 317.53(07)
ББК 22.16я7
П 58

*Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом
Северного (Арктического) федерального университета
имени М.В. Ломоносова*

Рецензенты: *А.В. Латышев*, заслуженный деятель науки РФ, заведующий кафедрой математического анализа Московского государственного областного университета, доктор физико-математических наук, профессор;
И.Н. Слободская, старший преподаватель кафедры математики и информатики Вологодского института права и экономики ФСИН России, кандидат физико-математических наук;
Н.И. Овсянникова, доцент кафедры прикладной математики Института математики, информационных и космических технологий САФУ имени М.В. Ломоносова, кандидат физико-математических наук

Попов, В.Н.

П 58 Прикладные вопросы теории функций комплексного переменного: учебное пособие / В.Н. Попов; Сев. (Арктич.) федер. ун-т им. М.В. Ломоносова. – Архангельск: ИПЦ САФУ, 2013. – 164 с.: ил.

ISBN 978-5-261-00850-7

Содержит систематическое и доступное изложение применения методов теории функций комплексного переменного для решения граничных задач кинетической теории газа и плазмы.

Предназначено для студентов и аспирантов, специализирующихся в области прикладной математики и информатики

УДК 517.53 (07)
ББК 22.16я7

ISBN 978-5-261-00850-7

© Попов В.Н., 2013
© Северный (Арктический)
федеральный университет
имени М.В. Ломоносова, 2013

Оглавление

Предисловие	6
Глава 1. Интеграл типа Коши	8
1.1. Определение интеграла типа Коши	8
1.2. Поведение интеграла типа Коши в окрестности бесконечно удаленной точки	13
1.3. Поведение интеграла типа Коши на концах кон- тура интегрирования	13
1.4. Интеграл типа Коши на действительной число- вой прямой	14
1.5. Интегральная теорема Коши для полуплоскости Задания для самостоятельного решения	16 17
Глава 2. Вычеты и их приложения	18
2.1. Разложение аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана	18
2.2. Нули и особые точки аналитических функций ..	26
2.3. Вычеты	28
2.4. Основная теорема теории вычетов	32
2.5. Теорема о полной сумме вычетов	33
2.6. Логарифмический вычет. Принцип аргумента...	34
2.7. Аналитическое продолжение	35
Задания для самостоятельного решения	35
Глава 3. Индекс функции по заданному контуру	36
3.1. Основные определения	36
3.2. Способы вычисления индекса функции по за- данному контуру	37

3.3. Индекс функции с дробно-рациональным коэффициентом	39
Задания для самостоятельного решения.....	40
Глава 4. Краевая задача Римана	41
4.1. Постановка задачи	41
4.2. Отыскание кусочно-аналитической функции по заданному скачку.....	41
4.3. Решение однородной краевой задачи Римана....	42
4.4. Решение неоднородной краевой задачи Римана .	48
4.5. Неоднородная краевая задача Римана с дробно-рациональным коэффициентом	53
4.6. Задача Римана для полуплоскости	56
Задания для самостоятельного решения.....	60
Глава 5. Сингулярные интегральные уравнения	62
5.1. Постановка задачи	62
5.2. Характеристическое уравнение в случае замкнутого контура	63
5.3. Характеристическое уравнение на действительной числовой прямой	66
Задания для самостоятельного решения.....	69
Глава 6. Интегро-дифференциальные уравнения	70
6.1. Постановка задачи	70
6.2. Дисперсионная функция Черчиньяни	71
6.3. Поведение дисперсионной функции на действительной числовой прямой	75
6.4. Нули дисперсионной функции	76
6.5. Построение факторизирующей функции $X(z)$	78
6.6. Интегральные представления факторизирующей функции.....	81
6.7. Факторизация дисперсионной функции	82
6.8. Представление факторизирующей функции на разрезе	85
6.9. Вычисление коэффициентов в разложении факторизирующей функции	88

6.10. Интегральное представление функции $X^{-1}(z)$..	92
Задания для самостоятельного решения.....	94
Глава 7. Аналитические решения краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений	95
7.1. Полупространственная краевая задача.....	95
7.2. Двухточечная краевая задача с однородными граничными условиями.....	101
7.3. Двухточечная краевая задача с неоднородными граничными условиями.....	113
7.4. Векторные краевые задачи	123
7.5. Нестационарная краевая задача.....	147
Задания для самостоятельного решения	161
Список литературы	162

Предисловие

Математические методы теории функций комплексного переменного в настоящее время широко применяются для решения большого числа прикладных задач гидро- и аэродинамики, теории упругости, теоретической астрофизики, квантовой механики, кинетической теории разреженного газа и плазмы.

Предлагаемое вниманию читателя учебное пособие посвящено рассмотрению вопросов, связанных с применением методов теории функций комплексного переменного для решения граничных задач кинетической теории разреженного газа. В первых трех главах справочно излагается материал в целом уже знакомый по стандартному курсу теории функций комплексного переменного, читаемому в рамках общего курса математики. Сюда входит понятие интеграла типа Коши, теория вычетов, индекс краевой задачи по заданному контуру. Затем подробно рассматриваются краевая задача Римана, сингулярные интегральные и интегро-дифференциальные уравнения. В последней главе приведены ставшие уже классическими примеры краевых задач кинетической теории разреженного газа, для решения которых используется весь рассмотренный ранее математический аппарат теории функций комплексного переменного. При изложении материала главное внимание уделяется математическим аспектам решаемых задач. С выводом исходных уравнений, постановкой рассматриваемых задач, их физическим смыслом можно ознакомиться в приведенных в списке литературы монографиях или в оригинальных работах, ссылки на которые приведены в начале каждого параграфа.

Учебное пособие составлено на основе курсов лекций, прочитанных автором в разное время студентам, бакалаврам, магистрантам и аспирантам математического факультета Поморского государственного университета имени М.В. Ломоносова, кафедры математики Архангельского государственного

технического университета и Института математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова.

Учебное пособие может быть полезным также научным работникам, специализирующимся в области физики плазмы, теоретической астрофизики, линейной теории переноса.