«Оптика атмосферы и океана», **25**, № 7 (2012)

ОПТИКА СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

УДК 535.24; 535.6

Влияние оптического вихря на случайные смещения Лагерра–Гауссова лазерного пучка, распространяющегося в турбулентной атмосфере

В.П. Аксенов, Ч.Е. Погуца*

Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1

Поступила в редакцию 13.12.2011 г.

Посвящена исследованию случайного блуждания центра тяжести вихревого лазерного пучка, распространяющегося в среде с неоднородностями диэлектрической проницаемости. Пучок является циркулярной модой пучка Лагерра–Гаусса LG_0^l. Нами получены оценки влияния турбулентных условий распространения, дифракционных параметров и азимутального индекса (топологического заряда) пучка на величину дисперсии смещений его центра тяжести. Обнаружен «эффект гироскопа», заключающийся в том, что в режимах слабой и умеренной турбулентности случайные смещения центра тяжести вихревого лазерного пучка оказываются тем меньше, чем больше топологический заряд включенного в пучок оптического вихря.

Ключевые слова: смещения центра тяжести, случайные блуждания пучка, турбулентная атмосфера, вихревые пучки; shifts of a center of gravity, random flights of a beam, turbulent atmosphere, vortex beams.

В последние годы значительное число статей, опубликованных в журналах по оптике, посвящается вихревым оптическим пучкам. Эти пучки обладают изолированным минимумом интенсивности (нулем) в своем поперечном сечении. В направлении продольной оси пучка нули интенсивности составляют «нуль-линию». Векторное поле наклонов волнового фронта в окрестности нуля обладает теми же свойствами, которыми обладает вихревое течение идеальной жидкости, поэтому такой физический объект называется оптическим вихрем.

Каждому оптическому вихрю может быть сопоставлен топологический заряд, который представляет собой целое число l (положительное или отрицательное) в приращении фазы $S(r) = 2\pi l$ рад [1], которое возникает при обходе нуля интенсивности вдоль замкнутого контура. Дислокации волнового фронта, фазовые сингулярности, особые точки, точки ветвления фазовой функции – это названия закономерностей поведения действительной фазы когерентного светового пучка, несущего оптический вихрь.

Характерным примером пучков с оптическим вихрем является лазерный пучок Лагерра–Гаусса (LG) [2]. Световые лучи в таком пучке имеют вид раскручивающихся спиралей, демонстрируя в пространственных переменных вращательно-поступательное движение световой энергии вокруг его оси при возрастании продольной координаты [1]. Вихревые LG-пучки обладают орбитальным угловым моментом (ОУМ) [1, 3]. ОУМ вихревого лазерного пучка в однородной среде прямо пропорционален топологическому заряду оптического вихря. Топологический заряд оптического вихря, или орбитальный угловой момент, может выступать носителем информации [4].

Как правило, среда, через которую распространяется лазерный пучок, искажает его. Естественно, что для систем связи, применяющих оптические вихри для кодирования информации, возникает необходимость исследовать влияние среды на распространение вихревых лазерных пучков. Примером такого исследования могут служить работы [5–8], в которых анализируется влияние случайных аберраций, обусловленных турбулентностью атмосферы, на работу системы связи, использующей оптический вихрь. Было установлено, что топологический заряд вихревого пучка является достаточно устойчивой величиной, что позволяет использовать его в атмосферных оптических линиях связи.

В настоящей статье также исследуется распространение вихревого лазерного пучка в турбулентной атмосфере. Однако внимание уделено не проблемам трансформации сигнального оптического вихря, являющегося носителем информации, не исследованию формирования и эволюции фазовых сингулярностей на волновом фронте пучка (дислокаций волнового фронта), возникших благодаря деструктивной интерференции парциальных волн, а смещениям центра тяжести вихревого пучка как целого, которые происходят под действием крупномасштабных неоднородностей показателя преломления. Ведь функционирование оптической системы связи невозможно планировать без учета флуктуаций направления распространения излучения.

* Валерий Петрович Аксенов (avp@iao.ru); Чеслав Евгеньевич Погуца (pce@iao.ru).

Случайные смещения (блужданий) гауссовых лазерных пучков в турбулентной атмосфере хорошо изучены [9, 10]. Эта величина определяется выражением

$$\mathbf{r}_C(z) = \frac{1}{P_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\mathbf{r}\, I(\mathbf{r}, z)\cdot\mathbf{r}, \qquad (1)$$

где $I(\mathbf{r}, z)$ – случайное распределение интенсивности в поперечном сечении пучка; $P_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} I(\rho; z)d\rho$ – его полная мощность. Для расчетов статистических характеристик величины (1) используют численные [11] и аналитические подходы [9, 10].

Будем использовать аналитический подход [12], который базируется на следующем интегральном представлении $\mathbf{r}_C(z)$:

$$\mathbf{r}_C(z) = \frac{1}{2P_0}\int\limits_0^z d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2r(z-\xi)I(\mathbf{r};\xi)\nabla_{\perp r}\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r};\xi). \quad (2)$$

Здесь $\tilde{\varepsilon}(x, y, z)$ – флуктуации диэлектрической проницаемости среды; ξ – переменная интегрирования. Представление (2) позволяет получить следующее выражение для $\sigma_C^2 = \left\langle \mathbf{r}_C^2 \right\rangle$ – дисперсии вектора $\mathbf{r}_C(z)$ (при $\left\langle \mathbf{r}_C(z)\right\rangle = 0$):

$$\sigma_C^2 = \frac{\pi}{2P_0^{\,2}}\int\limits_0^z d\xi (z-\xi)^2 \iint d^2\kappa\Phi_\varepsilon(|\boldsymbol{\kappa}|, \xi)\kappa^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2r_1 \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2r_2 \exp\{i\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\}\left\langle I(\mathbf{r}_1;\xi)I(\mathbf{r}_2;\xi)\right\rangle, \qquad (3)$$

где $\Phi_\varepsilon(|\boldsymbol{\kappa}|, \xi)$ – спектр флуктуаций диэлектрической проницаемости среды.

Получило распространение «среднеинтенсивное» приближение, заключающееся в приближенной замене в представлении (3):

$$\left\langle I(\mathbf{r}_1;\xi)I(\mathbf{r}_2;\xi)\right\rangle \approx \left\langle I(\mathbf{r}_1;\xi)\right\rangle\left\langle I(\mathbf{r}_2;\xi)\right\rangle. \qquad (4)$$

Это приближение с хорошими результатами [10] применяется для расчетов флуктуаций «центра тяжести» лазерных пучков в случайно-неоднородной среде.

Нас не должно смущать, что при распространении вихревого пучка в свободной атмосфере интенсивность в его центре обращается в нуль. Формула (4) содержит поперечный профиль интенсивности. Этот профиль при включении в пучок оптического вихря принимает вид «пончика» [1, 2] демонстрируя перераспределение плотности энергии от центра к периферии. По мере распространения пучка в случайно-неоднородной среде начальное распределение «расплывается», оптический вихрь (с нулем интенсивности в центре) смещается случайным образом с начального осевого положения, оптические вихри с $|l| > 1$ распадаются на совокупность вихрей с $|l| = 1$. Тем не менее среднее распределение интенсивности не достигает нулевых значений ни в одной из точек поперечной плоскости. Используя Фурье-представление

$$J(\boldsymbol{\kappa}, z) = \frac{1}{4\pi^2}\iint I(\mathbf{r}; z)e^{-i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}}\, d^2r \qquad (5)$$

для интенсивности

$$I(\mathbf{r}; z) = \iint J(\boldsymbol{\kappa}, z)e^{i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}}\, d^2\kappa \qquad (6)$$

$$\left(J^*(\boldsymbol{\kappa}, z) = J(-\boldsymbol{\kappa}, z)\right),$$

с учетом (4) получим

$$\sigma_C^2 = \frac{8\pi^5}{P_0^2}\int\limits_0^z d\xi(z-\xi)^2 \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\kappa\Phi_\varepsilon(|\boldsymbol{\kappa}|, \xi)\kappa^2\left\langle J(\boldsymbol{\kappa}, \xi)\right\rangle\left\langle J(-\boldsymbol{\kappa}, \xi)\right\rangle. \qquad (7)$$

Вычислим на основании выражения (7) средний квадрат смещения центра тяжести пучка LG. Выберем циркулярную моду пучка LG_0^l с произвольными значениями азимутального индекса l (топологического заряда оптического вихря). Комплексная амплитуда поля такого пучка в исходной плоскости ($z = 0$) будет иметь вид

$$u(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{8\Phi}{c|l|!}}\left(\frac{r_x + ir_y}{a}\right)^{|l|}\exp\left\{-\frac{r^2}{2a^2}\right\}, \qquad (8)$$

где a – эффективный радиус пучка; c – скорость света.

Для получения функции $\left\langle J(\boldsymbol{\kappa}, \xi)\right\rangle$ воспользуемся, как это было сделано в [12], представлением

$$\gamma(\rho, \boldsymbol{\kappa}, z) = \gamma\left(\rho - \frac{\boldsymbol{\kappa}z}{k}, \boldsymbol{\kappa}, 0\right)\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\pi k^2}{4}\int\limits_0^z H\left(\rho - \frac{\boldsymbol{\kappa}z}{k}(1-\xi)\right)d\xi\right\}, \qquad (9)$$

где

$$\gamma(\rho, \boldsymbol{\kappa}, z) = \frac{1}{4\pi^2}\iint \Gamma_2(\rho, \mathbf{R}; z)e^{-i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{R}}\, d^2R, \qquad (10)$$

$$\Gamma_2(\rho, \mathbf{R}, z) \equiv \Gamma_2((\mathbf{R} + \rho/2, \mathbf{R} - \rho/2, z) =$$

$$= \left\langle u(\mathbf{R} + \rho/2, z)u^*(\mathbf{R} - \rho/2, z)\right\rangle = \left\langle u(\mathbf{r}_1, z)u^*(\mathbf{r}_2, z)\right\rangle$$

– функция когерентности второго порядка, записанная в координатах центра тяжести $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ и сдвига $\rho = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ точек наблюдения; k – волновое число;

$$H(\rho) = 2\int[1 - \cos\kappa\rho]\Phi_\varepsilon(|\boldsymbol{\kappa}|, \xi)d^2\kappa. \qquad (11)$$

С учетом того что $\gamma\left(-\frac{\boldsymbol{\kappa}z}{k}, \boldsymbol{\kappa}, 0\right) = J_0(\boldsymbol{\kappa}, z)$ – Фурье-спектр интенсивности в свободном пространстве

$\left(I_0(\mathbf{r},z)\right.$ – соответствующая интенсивность$\left.\right)$ [13], вместо (9) получим

$$\left\langle I(\mathbf{R},z)\right\rangle = \Gamma_2(0,\mathbf{R},z) = \int J_0(\kappa,z)\times$$

$$\times \exp\left\{i\kappa\mathbf{R} - \frac{\pi k^2}{4}\int_0^z H\left(-\frac{\kappa z}{k}\left(1-\frac{\zeta}{z}\right)\right)d\zeta\right\}d^2\kappa. \quad (12)$$

Применяя формулу (6), запишем

$$\left\langle J(\kappa,z)\right\rangle = J_0(\kappa,z)\times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\pi k^2}{4}\int_0^z H\left(-\frac{\kappa z}{k}\left(1-\frac{\zeta}{z}\right)\right)d\zeta\right\}. \quad (13)$$

Чтобы найти $J_0(\kappa,\zeta)$, рассчитаем комплексную амплитуду поля лазерного пучка с исходным распределением (8) в приближении френелевской дифракции:

$$u(\mathbf{r},z) = \frac{k}{2\pi iz}\iint d\rho\, u(\rho,0)\exp\left\{\frac{ik(\rho-\mathbf{r})^2}{2z}\right\},$$

и для $I_0(\mathbf{r},z) = \left|u(\mathbf{r},z)\right|^2$ будем иметь

$$I_0(r,z) = \frac{8\Phi}{c|l|!}\left(\left(\frac{k}{z}\right)\frac{\Omega}{g^2(z)}\right)^{|l|+1} r^{2|l|}\exp\left\{-\frac{k}{z}\frac{\Omega}{g^2(z)}r^2\right\}, \quad (14)$$

где $g^2(z) = 1 + \Omega^2$, $\Omega = ka^2/z$.

Подставляя (14) в (6), переходя к полярным координатам, интегрируя по угловой переменной, а при интегрировании по радиальной переменной, используя табличный интеграл [14, формула 2.12.9.3], получим

$$J_0(\kappa,z) = \frac{2\Phi}{c\pi}\exp\left\{-\frac{1}{4}\left(\frac{g^2(z)}{\Omega}\right)\frac{z}{k}\kappa^2\right\}\times$$

$$\times L^0_{|l|}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{g^2(z)}{\Omega}\right)\frac{z}{k}\kappa^2\right). \quad (15)$$

Здесь $L^0_{|l|} = \sum_{m=0}^{|l|}(-1)^m\frac{|l|!}{(m!)^2\left(|l|-m\right)!}x^m$ – полином Лагерра [15].

Тогда в соответствии с (13) для Фурье-представления средней интенсивности на дистанции z в турбулентной среде запишем

$$\left\langle J(\kappa,z)\right\rangle = J_0(\kappa,z)\times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\pi k^2}{4}\int_0^z H\left(-\frac{\kappa z}{k}\left(1-\frac{\zeta}{z}\right)\right)d\zeta\right\}. \quad (16)$$

При расчетах σ_C^2 используем пространственный спектр флуктуаций диэлектрической проницаемости среды

$$\Phi_\varepsilon\left(|\kappa|,\xi\right) = 0{,}033C_\varepsilon^2\kappa^{-11/3}, \quad (17)$$

где C_ε^2 – структурная характеристика флуктуаций диэлектрической проницаемости.

С учетом (15)–(17)

$$\left\langle J(\kappa,z)\right\rangle = \frac{2\Phi}{c\pi}L^0_{|l|}\left(\frac{1}{4a^2}g^2(z)\left(\frac{z}{k}\right)^2\kappa^2\right)\times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{4a^2}g^2(z)\left(\frac{z}{k}\right)^2\kappa^2 - 0{,}142\pi\beta_0^2\left(\frac{z}{k}\right)^{\frac{5}{6}}\kappa^{\frac{5}{3}}\right\}. \quad (18)$$

Здесь $\beta_0^2 = 0{,}307C_\varepsilon^2k^{7/6}z^{11/6}$ – параметр турбулентности. Подставив (17) в (7), получим

$$\sigma_C^2 = 1{,}06\beta_0^2\frac{a^2}{\Omega}\int_0^1 d\xi(1-\xi)^2\int_0^\infty d\kappa\,\kappa^{-\frac{2}{3}}\left[L^0_{|l|}\left(\frac{(\xi^2+\Omega^2)}{4\Omega}\kappa^2\right)\right]^2\times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(\xi^2+\Omega^2)}{2\Omega}\kappa^2 - 0{,}284\pi\beta_0^2\xi^{\frac{8}{3}}\kappa^{\frac{5}{3}}\right\}. \quad (19)$$

Для сравнения результатов расчета σ_C^2 с результатами численного моделирования распространения лазерного пучка методом Монте-Карло [11] перепишем (19), используя вместо параметра β_0^2 структурную функцию фазы сферической волны, вычисленную на размере выходной апертуры $D_s(2a) = 0{,}275C_\varepsilon^2k^2z(2a)^{5/3} = 2{,}84\beta_0^2\Omega^{5/6}$.

В дальнейших численных расчетах используем выражение

$$\sigma_C^2 = 0{,}373D_s(2a)a^2\Omega^{-11/6}\int_0^1 d\xi(1-\xi)^2\times$$

$$\times\int_0^\infty d\kappa\,\kappa^{-2/3}\left[L^0_{|l|}\left(\frac{(\xi^2+\Omega^2)}{4\Omega}\kappa^2\right)\right]^2\times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(\xi^2+\Omega^2)}{2\Omega}\kappa^2 - 0{,}314D_s(2a)\Omega^{-5/6}\xi^{8/3}\kappa^{5/3}\right\}. \quad (20)$$

На рис. 1 представлены результаты расчета среднеквадратического отклонения σ_C центра тяжести гауссова пучка по формуле (20) и по методу Монте-Карло, описанному в [11].

Будем иметь в виду, что моделирование в [11] проведено в рамках кармановского спектра атмосферной турбулентности $\Phi_\varepsilon\left(|\kappa|,\xi\right) = 0{,}033C_\varepsilon^2 = \left(\kappa^2 + (2\pi/M)^2\right)^{-11/6}$ с конечным внешним масштабом M, а взятая нами модель спектра отвечает кармановской модели с бесконечным внешним масштабом [9]. Расхождения между зависимостями, полученными на основе нашего рассмотрения и с помощью метода Монте-Карло, укладываются в указанный диапазон погрешности [10] «среднеинтенсивного» приближения (4).

Результаты расчетов σ_C, пучков Лагерра–Гаусса с различными значениями азимутального индекса l продемонстрированы на рис. 2.

Они свидетельствуют о бóльшей устойчивости вихревых пучков к воздействию турбулентной атмосферы по сравнению с гауссовым пучком, не несущим