МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ДОМАШНЕЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «РЯДЫ ФУРЬЕ»

Учебно-методическое пособие

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2016

1. Определение тригонометрического ряда Фурье

Определение. *Ряд вида* $\frac{A_0}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k\cos kt+B_k\sin kt\right)$ *называется тригонометрическим.*

Частичные суммы такого ряда $S_n(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=0}^{n}\left(A_k\cos kt+B_k\sin kt\right)$ являются линейными комбинациями функций, входящими в систему функций

$$\{1,\sin t,\cos t,\sin 2t,\cos 2t,\sin 3t,\ldots\}. \tag{1}$$

Система (1) называется тригонометрической системой функций.

Определение. *Функции* $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$, *определенные на промежутке* (a,b), *называются ортогональными на этом промежутке, если интеграл от их произведения равен нулю, то есть* $\int_a^b \varphi(t)\psi(t)dt=0$.

Лемма 1. Тригонометрическая система функций (1) обладает свойством ортогональности на отрезке $[-\pi,\pi]$.

Ортогональность тригонометрической системы выражается следующими равенствами:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mt\sin nt dt=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos mt\cos nt dt=0,\quad m\neq n,\ m.n\in N$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mt\cos nt dt=0,\quad m,n=1,2,3,\ldots,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin mt dt=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos mt dt=0,\quad m=1,2,3,\ldots.$$

Определение. *Функция* $f(x)$ *называется абсолютно интегрируемой на промежутке* (a,b), *если сходится интеграл* $\int_a^b |f(x)|dx$.

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке $(a,a+2l)$, тогда интегралы $\int_a^{a+2l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx$ и $\int_a^{a+2l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$ сходятся абсолютно (по признаку сравнения), так как справедливы неравенства $\left|f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\right|\le|f(x)|$, $\left|f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\right|\le|f(x)|$.

Определение. *Тригонометрический ряд* $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$, *коэффициенты которого определяются функцией* $f(x)$, *абсолютно интег-*

Доказательство. В силу свойства аддитивности интеграла имеем $\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-l}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx$. В первом интеграле сделаем замену переменной $x = -t$ и используем нечетность функции, получаем $\int_{-l}^{0} f(x)dx = -\int_{l}^{0} f(-y)dy = \int_{0}^{l} f(-x)dx = -\int_{0}^{l} f(x)dx$.

Лемма 4. *Пусть $f(x)$ – четная, абсолютно интегрируемая на промежутке $(-l,l)$ функция, тогда* $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx$.

Последняя лемма доказывается аналогично лемме 3.

Приведем свойства ядра Дирихле.

Лемма 5. *Ядро Дирихле*

1) Четная, непрерывная, 2π периодическая функция, причем

$$D_n(0) = n + \frac{1}{2};$$

2) $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1;$$

3) $$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)dt = 1;$$

4) при $t \neq 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $$D_n(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Доказательство. Первое свойство вытекает автоматически из определения ядра Дирихле (3).

Для доказательства второго свойства проинтегрируем равенство (3) по отрезку $[-\pi,\pi]$, получаем $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dt + \sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt dt = \pi$, так как $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt dt = 0$, для любого $k \in N$.

Третье свойство следует из второго в силу четности ядра Дирихле и леммы 4, поэтому $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 2\int_{0}^{\pi} D_n(t)dt$.

Докажем четвертое свойство.

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left(\sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{t}{2}\cos kt\right) =$$

ђqqdЧаеЧ bЁ dәqЁbЧзе d ɐɔɑбɔɑ ɟqqdЧqчè

$$=\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left(\sin\frac{t}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2k+1}{2}t-\sin\frac{2k-1}{2}\right)\right)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}, \quad t\neq 2\pi k,\ k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* $f(x)$ – *абсолютно интегрируемая на промежутке* $(-\pi,\pi)$, 2π – *периодическая функция, тогда частичная сумма ряда Фурье имеет следующие представления*

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)f(x-t)dt,$$

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}D_n(t)[f(x-t)+f(x+t)]dt.$$

Доказательство. В интеграле Дирихле сделаем замену переменных $t=x-y$ и используем четность и периодичность ядра Дирихле, а также лемму 2. Получаем

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t-x)f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+x}^{\pi+x}D_n(-y)f(x-y)dy=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(-y)f(x-y)dy=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(y)f(x-y)dy.$$

Таким образом, первое равенство доказано. Для доказательства второго равенства разобьем промежуток интегрирования и воспользуемся свойством аддитивности интеграла. Получаем

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(y)f(x-y)dy=.\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}D_n(y)f(x-y)dy+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}D_n(y)f(x-y)dy.$$

В первом интеграле сделаем замену переменной $-y=t$, а во втором $y=t$, учитывая, что $D_n(-t)=D_n(t)$, получаем

$$S_n(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0}D_n(-t)f(x+t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}D_n(-t)f(x-t)dt=-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0}D_n(t)f(x+t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}D_n(t)f(x-t)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}D_n(t)f(x+t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}D_n(t)f(x-t)dt==\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}D_n(t)[f(x-t)+f(x+t)]dt$$

Лемма доказана.

4. Сходимость ряда Фурье в точке

Определение. *Функция* $f(x)$ *называется кусочно-непрерывной на отрезке* $[a,b]$, *если она имеет конечное число точек разрыва, причем все точки разрыва первого рода.*

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎзə d ɕɔɑbɔɏ ɈqddɎqɏè

Для кусочно-непрерывной функции отрезок $[a,b]$ разбивается на конечное число промежутков, внутри которых функция непрерывна, а в каждой точке x_0 отрезка существуют односторонние конечные пределы, которые мы обозначим

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) \text{ для } \forall x \in [a,b), \quad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \text{ для } \forall x \in (a,b].$$

В точках непрерывности очевидно $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$.

Определение. *Функция $f(x)$ называется кусочно-дифференцируемой на отрезке $[a,b]$, если она кусочно-непрерывна, и отрезок разбивается на конечное число промежутков, внутри которых функция дифференцируема, а на концах этих промежутков существуют односторонние производные.*

Обозначим односторонние производные

$$f'_+(x) = \lim_{h \to +0} \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h} \text{ для } \forall x \in [a,b),$$

$$f'_-(x) = \lim_{h \to -0} \frac{f(x+h) - f(x-0)}{h} \text{ для } \forall x \in (a,b].$$

Очевидно, что в тех точках, где функция $f(x)$ дифференцируема, $f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x)$.

Замечание. Кусочно-непрерывные и кусочно-дифференцируемые на отрезке функции интегрируемы по Риману и, следовательно, являются абсолютно интегрируемыми на этом отрезке.

Большое значение в теории рядов Фурье имеет следующая теорема

Теорема Римана. *Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на интервале (a,b), тогда* $\lim\limits_{\gamma \to \infty} \int\limits_a^b f(x) \sin \gamma x dx = \lim\limits_{\gamma \to \infty} \int\limits_a^b f(x) \cos \gamma x dx = 0$.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ – $2l$-периодическая, кусочно-дифференцируемая на отрезке $[-l,l]$, то ее ряд Фурье в каждой точке x сходится, причем*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Доказательство. Докажем теорему (не умаляя общности) для случая $l = \pi$. В силу свойства 3) ядра Дирихле имеем

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} D_n(t) dt.$$

Для частичной суммы ряда Фурье в силу леммы 4 справедливо представление $S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} D_n(t) [f(x-t) + f(x+t)] dt$. Тогда получаем в силу свойства 4) ядра Дирихле

$$S_n(x)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x-t)+f(x+t)-f(x+0)-f(x-0)]D_n(t)dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{[f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)]}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)dt, \quad (5)$$

где $g(t)=\dfrac{f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)}{\sin\frac{t}{2}}$ – функция, имеющая конечное число точек разрыва первого рода на полуинтервале $(0,\pi]$, так же как и функции $f(x+t)$ и $f(x-t)$. Точка $t=0$ также является точкой разрыва первого рода, поскольку конечен предел

$$\lim_{t\to+0}g(t)=\lim_{t\to+0}\left(\frac{f(x+t)-f(x-0)}{t}+\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\right)\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}=2\lim_{t\to+0}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}+$$

$+2\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{f(x-t)-f(x-0)}{t}=2(f'_+(x)-f'_-(x))$. Таким образом, функция $g(t)$ является кусочно-непрерывной, а, следовательно, и абсолютно интегрируемой на отрезке $[0,\pi]$. По теореме Римана интеграл (5) стремится к нулю при $n\to\infty$, то есть

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(S_n(x)-\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi}g(t)\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)dt=0$. Отсюда получаем

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если функция* $f(x)$ *–* $2l$*-периодическая, кусочно-дифференцируемая на отрезке* $[-l,l]$*, непрерывна в точке* x*, то ее ряд Фурье в этой точке сходится к значению* $f(x)$*, то есть* $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\dfrac{k\pi x}{l}+b_k\sin\dfrac{k\pi x}{l}\right)=f(x)$.

Доказательство следствия 1 вытекает из равенства в точке непрерывности односторонних пределов значению функции, то есть $f(x+0)=f(x-0)=f(x)$. Отсюда имеем $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\dfrac{f(x)+f(x)}{2}=f(x)$.

Следствие 2. *Если* $f(x)$ *– 2l-периодическая, непрерывная функция, имеющая кусочно-непрерывную на отрезке* $[-l,l]$ *производную, то ее ряд Фурье сходится к значению* $f(x)$ *на всей числовой оси, то есть для любого* $x\in R$

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)=f(x).$$

Определение. *Если ряд Фурье сходится к функции на промежутке, будем говорить, что функция раскладывается на этом промежутке в ряд Фурье.*

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ – кусочно-дифференцируемая на отрезке $[-l,l]$, то ее ряд Фурье в каждой точке x сходится, причем*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)=\begin{cases}\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & \text{если} \quad x\in(-l,l)\\ \dfrac{f(l-0)+f(-l+0)}{2}, & \text{если} \quad x=\pm l\end{cases}..$$

Доказательство. Пусть $\bar f(x)$ – периодическое продолжение функции $f(x)$, рассмотренной на полуинтервале $[-l,l)$. Отметим, что ряд Фурье функции, абсолютно интегрируемой на промежутке $(a,a+2l)$, совпадает с рядом Фурье ее периодического продолжения. В самом деле, пусть a_k, b_k – коэффициенты Фурье функции $f(x)$, а $\bar a_k$, $\bar b_k$ – коэффициенты Фурье периодического ее продолжения $\bar f(x)$, тогда в силу *леммы 2*

$$\bar a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\bar f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx=\frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l}\bar f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx=\frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx=a_k,\ k=0,1,2,\dots.$$

Аналогично показывается, что $\bar b_k=b_k$.

Так как по определению периодического продолжения $\bar f(x)=f(x)$ для любого $x\in(a,a+2l)$, то $\dfrac{\bar f(x+0)+\bar f(x-0)}{2}=\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, а для точек $x=\pm l$ имеем $\bar f(-l-0)=f(l-0)$, $\bar f(l-0)=f(l-0)$, $\bar f(-l+0)=f(-l+0)$, $\bar f(l+0)=f(-l+0)$, поэтому

$$\frac{\bar f(l+0)+\bar f(l-0)}{2}=\frac{\bar f(-l+0)+\bar f(-l-0)}{2}=\frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}.$$

Следствие 1. *Если $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[-l,l]$ функция, имеющая кусочно-непрерывную производную, то ее ряд Фурье сходится к значению $f(x)$ на $(-l,l)$, то есть для любого $x\in(-l,l)$*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)=f(x).$$

Доказательство следствия основано на том факте, что периодическим продолжением непрерывной на полуинтервале $[-l,l)$ функции $f(x)$ является функция $\bar f(x)=\begin{cases}f(x), & \text{если} \quad x\in[-l,l)\\ f(x-2lk), & \text{если} \quad x\in[-l+2kl,l+2kl),\ k=\pm1,\pm2,\dots\end{cases}$

непрерывная на всей числовой оси, за исключением, Возможно, точек $x=l(2k+1)$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$. По следствию 1 к теореме 1 ряд Фурье функции $\bar f(x)$ сходится к самой функции во всех точках непрерывности, то есть