

УДК 519.71  
ББК 32.81я7  
М33

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук проф. *В. Б. Смирнова*  
(С.-Петербургский гос. архитектурно-строительный ун-т)  
д-р физ.-мат. наук доц. *Н. В. Кузнецов*  
(С.-Петербургский гос. ун-т)

*Рекомендовано к изданию  
Редакционно-издательским советом  
математико-механического факультета  
Санкт-Петербургского государственного университета*

**Матвеев А. С.**

М33 Введение в математическую теорию оптимального управления:  
Учебник. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2018. — 194 с.

ISBN 978-5-288-05809-7

Цель данного учебника — ознакомить читателя с математической теорией оптимального управления, её связями с другими разделами теории экстремальных задач, спецификой типичных математических задач оптимального управления и вытекающих из неё проблем, а также с основными положениями и базовыми подходами этой теории и их применением к решению конкретных задач. В изложении материала упор сделан на подходе, основанном на применении функционального анализа, который был разработан и развит Санкт-Петербургской (Ленинградской) школой математической кибернетики, созданной профессором СПбГУ В. А. Якубовичем, позволяющем не только рассматривать с единой точки зрения экстремальные задачи разных типов, но и унифицировать необходимые условия экстремума первого и более высокого порядка.

В основу учебника положен материал курса лекций, читаемых автором на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета.

Предназначен для студентов и аспирантов, обучающихся по направлению «Прикладная математика и информатика» и на смежных с ним специальностях.

УДК 519.71  
ББК 32.81я7

ISBN 978-5-288-05809-7

© Санкт-Петербургский  
государственный  
университет, 2018  
© А. С. Матвеев, 2018

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Используемые обозначения</b> .....	6
<b>Некоторые используемые понятия</b> .....	11
<b>Предисловие</b> .....	13
<b>Глава 1. Классические экстремальные задачи и задачи оптимального управления</b> .....	15
1.1. Классические экстремальные задачи .....	16
1.1.1. Условие Ферма в гладкой задаче безусловной оптимизации .....	—
1.1.2. Правило множителей Лагранжа в гладкой задаче математического программирования .....	17
1.1.3. Задачи выпуклого и линейного программирования. Усиленный принцип оптимальности Лагранжа. Теорема двойственности .....	24
1.1.4. Задачи вариационного исчисления .....	29
1.1.5. Уравнение Эйлера .....	30
1.1.6. Каноническая форма уравнения Эйлера. Преобразование Лежандра .....	31
1.1.7. Гладкость экстремалей .....	32
1.1.8. Условие Лежандра .....	—
1.1.9. Условие Вейерштрасса .....	—
1.1.10. Условие Якоби .....	33
1.1.11. Вычисление сопряжённых точек .....	35
1.1.12. Глобальные условия Лежандра и Якоби как достаточные условия глобального экстремума .....	40
1.2. Простейший пример задачи оптимального управления и её решения .....	42
1.2.1. Постановка задачи об оптимальном успокоении гармонического осциллятора .....	—
1.2.2. Решение задачи об оптимальном успокоении гармонического осциллятора .....	44
1.3. Классический метод вариаций и задачи оптимального управления .....	50
1.3.1. Классический метод вариаций вывода необходимых условий оптимальности .....	—

1.3.2. Пример общей постановки задачи оптимального управления .....	54
1.3.3. Классический метод вариаций и задачи оптимального управления .....	58
<b>Глава 2. Метод пучков (неклассических вариаций)</b>	
<b>вывода необходимых условий оптимальности .....</b>	<b>61</b>
2.1. Основные определения, идеи и факты .....	—
2.1.1. Пучки кривых: основные определения .....	—
2.1.2. Простейшие необходимые условия оптимальности, связанные с пучками кривых .....	64
2.2. Примеры пучков и связанных с ними необходимых условий оптимальности .....	68
2.2.1. Пучок классических вариаций .....	—
2.2.2. Пучок анизотропных вариаций .....	69
2.2.3. Стандартное пространство управлений .....	79
2.2.4. Пучок простых игольчатых вариаций .....	81
2.2.5. Дифференцирование интегрального функционала по пучку простых игольчатых вариаций .....	83
2.2.6. Необходимые условия экстремума в задаче минимизации интегрального функционала .....	84
2.2.7. Пучок сложных игольчатых вариаций .....	85
2.2.8. Выпуклое дифференцирование интегрального функционала по пучку сложных игольчатых вариаций .....	89
2.2.9. Необходимые условия экстремума в задаче минимизации интегрального функционала при интегральных ограничениях .....	91
<b>Глава 3. Абстрактная теория оптимального управления .....</b>	<b>93</b>
3.1. Постановка абстрактной задачи оптимального управления ...	94
3.2. Задачи без дополнительных ограничений. План вывода условий оптимальности .....	96
3.3. Теорема о неявной функции .....	98
3.4. Разложение и дифференцирование по пучку сложной функции	103
3.5. Необходимые условия оптимальности в абстрактной задаче оптимального управления .....	108
<b>Глава 4. Принцип максимума Понтрягина .....</b>	<b>112</b>
4.1. Задача оптимального управления с фиксированным интервалом времени .....	—
4.1.1. Формализация задачи .....	114
4.1.2. Проверка условий теоремы 3.5.1 .....	115
4.1.3. Расшифровка заключения абстрактной теоремы и формулировка принципа максимума Понтрягина .....	125
4.1.4. Завершение доказательства принципа максимума: случай неограниченного множества допустимых управлений ...	130

4.2. Принцип максимума для задачи оптимального управления с фиксированным интервалом времени .....	134
4.2.1. Постановка задачи .....	—
4.2.2. Принцип максимума Понтрягина для задачи с нефиксированным временем .....	136
4.2.3. О применении принципа максимума для решения задач оптимального управления .....	139
4.2.4. Принцип максимума Понтрягина для задачи с фиксированным временем как частный случай теоремы 4.2.1 ...	142
4.2.5. Принцип максимума Понтрягина для задачи с фиксированным временем и фиксированным начальным и конечным состоянием .....	145
4.2.6. Замечания о локальном экстремуме .....	148
4.3. Принцип максимума и вариационное исчисление .....	149
4.3.1. Постановка простейшей задачи вариационного исчисления и её сведение к задаче оптимального управления ...	—
4.3.2. Принцип максимума для задачи вариационного исчисления .....	150
4.4. Пример применения принципа максимума: оптимальное по быстродействию успокоение гармонического осциллятора .....	154
4.4.1. Постановка задачи об оптимальном успокоении гармонического осциллятора .....	—
4.4.2. Выписывание принципа максимума для рассматриваемой задачи .....	155
4.4.3. Предварительный анализ принципа максимума .....	157
4.4.4. Выводы из принципа максимума .....	158
4.4.5. Коленчатое управление, приводящее осциллятор в состояние покоя .....	160
4.4.6. Оптимальный закон управления .....	167
4.4.7. Заключительные замечания .....	168
4.5. Принцип максимума для задачи оптимального управления системой, описываемой интегральным уравнением .....	—
4.5.1. Формализация задачи .....	170
4.5.2. Проверка условий теоремы 3.5.1 .....	171
4.5.3. Расшифровка заключения абстрактной теоремы и формулировка аналога принципа максимума Понтрягина ..	181
4.6. Задачи для самостоятельного решения .....	182
<b>Литература .....</b>	<b>191</b>
<b>Список иллюстраций .....</b>	<b>193</b>