

УДК 517.9

Интернет-магазин
MATHESS

<http://shop.rcd.ru>

- физика
- математика
- биология
- нефтегазовые технологии



Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту №04-01-14103.

Кудряшов Н.А.

Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 360 с.

Книга является введением в аналитическую теорию нелинейных дифференциальных уравнений и посвящена анализу нелинейных математических моделей и динамических систем на предмет их точного решения (интегрируемости).

Предложены выводы нелинейных математических моделей, интенсивно изучаемых в последнее время. Представлены алгоритмы анализа особых точек решений дифференциальных уравнений. Обсуждаются свойства точно решаемых нелинейных уравнений. Дано обобщение аналитической теории на случай нелинейных уравнений в частных производных. Представлены методы нахождения аналитических решений нелинейных уравнений. Применение методов проиллюстрировано многочисленными примерами.

Предназначена для студентов, аспирантов и научных сотрудников, интересующихся нелинейными математическими моделями, теорией солитонов, методами построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений, теорией уравнений Пенлеве и их высших аналогов.

ISBN 5-93972-285-7

© Н. А. Кудряшов, 2004

© Институт компьютерных исследований, 2004

<http://rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	9
ГЛАВА 1. НЕЛИНЕЙНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ	13
1.1 Уравнение Кортевега – де Вриза для описания волн на воде .	13
1.2 Простейшие решения уравнения Кортевега – де Вриза	23
1.3 Модель для описания возмущений в цепочке одинаковых масс	26
1.4 Простейшие решения модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза	32
1.5 Фазовая и групповая скорости волн	35
1.6 Нелинейное уравнение Шредингера для огибающей волнового пакета	39
1.7 Уединенные волны, описываемые нелинейным уравнением Шредингера и групповой солитон	42
1.8 Уравнение \sin -Гордона для описания дислокаций в твердом теле	44
1.9 Простейшие решения уравнения \sin -Гордона и топологический солитон	48
1.10 Нелинейное уравнение переноса и уравнение Бюргерса	51
1.11 Модель Хенона – Хейлеса	57
1.12 Система Лоренца	60
1.13 Задачи и упражнения к главе 1	68
ГЛАВА 2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	71
2.1 Классификация особых точек функций комплексной переменной	71
2.2 Неподвижные и подвижные особые точки	74
2.3 Уравнения, не имеющие решений с критическими подвижными особыми точками	76
2.4 Задача Ковалевской о волчке	82
2.5 Определение свойства Пенлеве и уравнения Пенлеве	85

2.6	Второе уравнение Пенлеве для описания электрического поля в полупроводниковом диоде	87
2.7	Алгоритм Ковалевской анализа дифференциальных уравнений	91
2.8	Локальные представления решений уравнений типа Пенлеве .	96
2.9	Метод Пенлеве для анализа дифференциальных уравнений .	100
2.10	Трансцендентная зависимость решений первого уравнения Пенлеве	106
2.11	Неприводимость уравнений Пенлеве	111
2.12	Преобразования Бэклунда для решений второго уравнения Пенлеве	113
2.13	Рациональные и специальные решения второго уравнения Пенлеве	114
2.14	Дискретные уравнения Пенлеве	116
2.15	Асимптотические решения первого и второго уравнений Пенлеве	118
2.16	Линейные представления уравнений Пенлеве	120
2.17	Алгоритм Конта – Форди – Пикеринга для проверки уравнений на свойство Пенлеве	122
2.18	Примеры анализа уравнений методом возмущений Пенлеве .	125
2.19	Тест Пенлеве для системы уравнений Хенона-Хейлеса	128
2.20	Точно решаемые случаи системы Лоренца	131
2.21	Задачи и упражнения к главе 2	135

ГЛАВА 3. СВОЙСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ		138
3.1	Интегрируемые системы	138
3.2	Преобразование Коула – Хопфа для уравнения Бюргерса . . .	141
3.3	Преобразование Миуры и пара Лакса для уравнения Кортевега – де Вриза	144
3.4	Законы сохранения для уравнения Кортевега – де Вриза . . .	146
3.5	Отображения и преобразования Бэклунда	149
3.6	Преобразования Бэклунда для уравнения sin-Гордона	151
3.7	Преобразования Бэклунда для уравнения Кортевега – де Вриза	153
3.8	Семейство уравнений Кортевега – де Вриза	155
3.9	Семейство уравнений АKNС	157
3.10	Тест Абловица – Рамани – Сигура для нелинейных уравнений в частных производных	160
3.11	Метод Вайса – Табора – Карневейля для анализа нелинейных уравнений	163
3.12	Пенлеве-анализ уравнения Бюргерса методом ВТК	165

3.13	Анализ уравнения Кортевега – де Вриза	168
3.14	Построение пары Лакса для уравнения Кортевега – де Вриза методом ВТК	169
3.15	Анализ модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза	171
3.16	Усеченные разложения, как отображения решений нелиней- ных уравнений	172
3.17	Инвариантный пенлеве-анализ	174
3.18	Применение инвариантного пенлеве-анализа для нахождения пар Лакса	176
3.19	Соотношения между основными точно решаемыми нелиней- ными уравнениями	179
3.20	Семейство уравнений Бюргерса	187
3.21	Задачи и упражнения к главе 3	189

ГЛАВА 4. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИ- АЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 193

4.1	Применение усеченных разложений для построения частных решений неинтегрируемых уравнений	193
4.2	Точные решения уравнения Бюргерса – Хаксли	197
4.3	Частные решения уравнения Бюргерса – Кортевега – де Вриза	205
4.4	Уединенные волны, описываемые уравнением Курамото – Сивашинского	208
4.5	Кноидальные волны, описываемые уравнением Курамото – Сивашинского	215
4.6	Частные решения простейшего нелинейного волнового урав- нения пятого порядка	217
4.7	Точные решения нелинейного уравнения пятого порядка для описания волн на воде	220
4.8	Решения уравнения Кортевега – де Вриза пятого порядка в переменных бегущей волны	230
4.9	Точные решения модели Хенна – Хейлеса	235
4.10	Метод нахождения рациональных решений некоторых точно решаемых нелинейных уравнений	237
4.11	Задачи и упражнения к главе 4	241

ГЛАВА 5. ВЫСШИЕ АНАЛОГИ УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ И ИХ СВОЙСТВА 244

5.1	Анализ уравнений четвертого порядка на свойство Пенлеве .	244
5.2	Уравнения четвертого порядка, прошедшие тест Пенлеве . . .	251

5.3	Трансценденты, определяемые нелинейными уравнениями четвертого порядка	253
5.4	Локальные представления решений для уравнений четвертого порядка	258
5.5	Асимптотические свойства трансцендент уравнений четвертого порядка	264
5.6	Семейства уравнений с решениями в виде трансцендент	266
5.7	Пары Лакса для уравнений четвертого порядка	271
5.8	Обобщения уравнений Пенлеве	277
5.9	Преобразования Бэклунда для высших аналогов уравнений Пенлеве	284
5.10	Рациональные и специальные решения высших аналогов уравнений Пенлеве	291
5.11	Дискретные уравнения, соответствующие высшим аналогам уравнений Пенлеве	295
5.12	Задачи и упражнения к главе 5	304
ГЛАВА 6. МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ И МЕТОД ХИРОТЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ВРИЗА		
6.1	Задача Коши для уравнения Кортевега – де Вриза	306
6.2	Прямая задача рассеяния	307
6.3	Интегральный вид стационарного уравнения Шредингера	313
6.4	Аналитические свойства амплитуды рассеяния	315
6.5	Уравнение Гельфанда – Левитана – Марченко	318
6.6	Интегрирование методом обратной задачи рассеяния уравнения Кортевега – де Вриза	321
6.7	Решение уравнения Кортевега – де Вриза в случае безотражательных потенциалов	323
6.8	Оператор Хироты и его свойства	326
6.9	Нахождение солитонных решений уравнения Кортевега – де Вриза методом Хироты	327
6.10	Метод Хироты для модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза	331
6.11	Задачи и упражнения к главе 6	333
Литература		337
Предметный указатель		357