МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДЫ АНАЛИЗА СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПРОСТЕЙШИМ ПОТОКОМ ЗАЯВОК

Учебно-методическое пособие по курсу
«Теория массового обслуживания»

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2011

ŋqdqɐэɎ bɆ dedɆbɎзә d ɛɔɑbɔɐ Ɉqdqɏqɐè

Содержание

При фиксированном значении $t = t_i$ случайный процесс представляет собой измеримую функцию $\xi_i = \xi_i(\omega)$, т.е. случайную величину.

При фиксированном элементарном событии ω_i получаем некоторую детерминированную (неслучайную) функцию $x_i(t)$, называемую реализацией (траекторией) случайного процесса.

Случайный процесс можно задавать или как множество реализаций с заданной на нем вероятностной мерой, или как последовательность (упорядоченную совокупность) случайных величин, соответствующих определённым значениям t. В последнем случае его можно рассматривать как случайный вектор и задать с помощью многомерных законов распределения.

3. Многомерные функции распределения, плотности вероятностей, вероятности случайного процесса

Определение 3. Многомерной функцией распределения случайного процесса для фиксированных моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$ называется функция $2n$ переменных, определяемая следующим образом:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n) = \\ = P(\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2, \ldots, \xi(t_n) < x_n). \quad (1)$$

Для непрерывнозначного процесса можно определить многомерную плотность вероятностей

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}. \quad (2)$$

Если случайный процесс дискретного типа (множество возможных значений дискретно), то можно определить многомерные вероятности

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n) = \\ = P(\xi(t_1) = x_1, \xi(t_2) = x_2, \ldots, \xi(t_n) = x_n). \quad (3)$$

Случайный процесс считается заданным, если заданы многомерные функции распределения (плотности вероятностей или многомерные вероятности) любой размерности.

Замечание 1. Если t изменяется непрерывно, то для полного описания случайного процесса необходимо в многомерных законах распределения (1)–(3) устремить n к бесконечности ($n \to \infty$). Но этот предельный переход представляет определенные математические трудности. Кроме того, работать с многомерными функциями (1)–(3) при конечном, но большом значении n тоже не всегда удобно.

Существуют классы процессов, для полного описания которых достаточно знать двумерные законы распределения. К таким процессам относятся марковский и гауссовский процессы, которые наиболее часто используются в приложениях.

4. Условные вероятности и плотности вероятностей

Для процесса дискретного типа можно определить условные вероятности (вероятность того, что в момент времени t_2 значение процесса равно x_2, если в момент времени t_1 оно равнялось x_1):

$$P(x_2, t_2 | \, x_1, t_1) = \frac{P\,(x_1, x_2, t_1, t_2)}{P\,(x_1, t_1)}\,. \tag{4}$$

Для непрерывнозначного процесса условные плотности вероятностей имеют вид

$$f(x_2, t_2 | \, x_1, t_1) = \frac{f\,(x_1, x_2, t_1, t_2)}{f\,(x_1, t_1)}\,. \tag{5}$$

В n-мерном случае условные вероятности и плотности вероятностей определяются аналогично:

$$P(x_n, t_n | \, x_1, \ldots x_{n-1}, t_1, \ldots, t_{n-1}) = \frac{P\,(x_1, \ldots x_n, t_1, \ldots, t_n)}{P\,(x_1, \ldots, x_{n-1}, t_1, \ldots, t_{n-1})}\,,$$
$$f(x_n, t_n | \, x_1, \ldots, x_{n-1}, t_1, \ldots, t_{n-1}) = \frac{f\,(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n)}{f\,(x_1, \ldots, x_{n-1}, t_1, \ldots, t_{n-1})}.$$

Замечание 2. Условные вероятности (4) и плотности вероятностей (5) в теории случайных процессов называют переходными.

Определение 4. Случайный процесс называется однородным, если условные вероятности или условные плотности вероятностей зависят не от моментов времени, а от разности моментов времени, т.е.

$$\begin{aligned} P(x_2, t_2 | \, x_1, t_1) &= P(x_2, x_1, t_2 - t_1), \\ f(x_2, t_2 | \, x_1, t_1) &= f(x_2, x_1, t_2 - t_1). \end{aligned} \tag{6}$$

ŋqdqɐeɅ bɆ dedɆbɅзə d ɕɔɑbɔɐ ɈqddɅqɐè

5. Классификация случайных процессов

Как отмечается в [2], строгой классификации случайных процессов нет, поэтому можно говорить лишь о выделении по тому или иному признаку типов процессов, которые не обязательно в своей совокупности исчерпывают всевозможные типы и не являются несовместимыми друг с другом.

Случайные процессы можно классифицировать по:

1) характеру реализаций случайных процессов (характеру пространства состояний случайного процесса и параметра t);

2) виду закона распределения вероятностей;

3) характеру статистической связи между значениями случайного процесса в различные моменты времени.

Классификация по характеру реализаций:

1. Дискретная последовательность (дискретный процесс с дискретным временем) — это случайный процесс, у которого областью определения и областью возможных значений реализаций являются дискретные множества. Примеры: процессы в цифровых системах связи, компьютерных сетях, цифровой радиоаппаратуре и т.п.

2. Случайная последовательность, или временной ряд (непрерывнозначный процесс с дискретным временем) — это случайный процесс, область возможных значений реализаций которого — непрерывное множество, а область определения — дискретное множество. Примеры: метеорологические наблюдения, телеметрические данные состояния космонавтов и т.п.

3. Дискретные процессы (дискретный процесс с непрерывным временем) — это случайный процесс, множество возможных значений реализаций которого — дискретное множество, а область определения — непрерывное множество. Примеры: число абонентов телефонной станции, разговаривающих по телефону, количество автомобилей на автозаправочной станции и т.п.

4. Непрерывнозначный случайный процесс — это случайный процесс, у которого область возможных значений и область определения — непрерывные множества. Примеры: различные физические, химические, биологические процессы, протекающие в природе, организме человека.