МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

А.В. Глушко, В.В. Провоторов, А.С. Рябенко

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЗАДАЧА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Учебное пособие

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2015

СОДЕРЖАНИЕ

Тогда сходимость последовательности элементов $\{f_n\} \subset X$ к $f \in X$ определяется следующим образом: *последовательность элементов* $\{f_n\} \subset X$ *называется сходящейся к элементу* $f \in X$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать номер* $N = N(\varepsilon)$ *такой, что при* $n > N$ *выполняется неравенство* $\|f - f_n\| < \varepsilon$.

При этом пишут

$$f = \overset{X}{\lim_{n\to\infty}} f_n \quad \text{или} \quad f_n \overset{X}{\to} f .$$

Определенная таким образом сходимость в X называется сходимостью по норме. Позже (см. замечание в конце параграфа) будут рассмотрены понятия метрического пространства и сходимости в нем. Нормированное пространство является метрическим пространством с метрикой (1). Поэтому мы будем называть сходимость по норме также сходимостью по метрике (1).

Сходящаяся по норме последовательность обладает привычными свойствами:

1) сходящаяся в X последовательность может иметь только один предельный элемент;

2) всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится, причем к тому же пределу;

3) сходящаяся в X последовательность ограничена по норме.

Доказательства предложений 1 и 2 предоставляются в качестве упражнения читателю.

Для примера докажем свойство 3.

Из сходимости $f_n \overset{X}{\to} f$ следует, что для $\varepsilon = 1$ найдется номер N такой, что $\|f - f_n\| < 1$ при $n > N$. По неравенству треугольника при $n > N$ получим $\|f_n\| = \|f_n - f + f\| \le \|f - f_n\| + \|f\| < \|f\| + 1$. Следовательно, если взять в качестве M максимальное из чисел $\|f_1\|, \dots, \|f_N\|, \|f\| + 1$, то $\|f_n\| \le M$ для всех $n \ge 1$. Это и означает, что последовательность $\{f_n\}$ ограничена (по норме).

Важным понятием, связанным со сходимостью, является понятие полноты пространства X.

Определение. *Последовательность* $\{f_n\} \subset X$ *называется фундаментальной в* X *(или сходящейся в себе), если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется номер* $N = N(\varepsilon)$ *такой, что как только* $n > N$, $m > N$, *то* $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$.

Определение. *Нормированное пространство* X *называется полным, если любая фундаментальная последовательность элементов этого* *пространства сходится к элементу, принадлежащему этому пространству.*

Полное нормированное пространство называется банаховым пространством.

Напомним, что с понятием полноты мы встречались в математическом анализе при построении теории вещественных чисел. Полезно оглянуться на эту теорию с новой точки зрения. Пусть Q обозначает множество рациональных чисел, R – множество вещественных чисел. Q (R) как линейное пространство, элементами которого являются рациональные (вещественные) числа, а скалярами – опять же рациональные (вещественные) числа. Q (R) становится нормированным пространством, если в качестве нормы числа брать его модуль. Нормированное таким образом пространство R – полное (т.е. банахово), а пространство Q неполно. В самом деле, в R любая фундаментальная последовательность имеет предел, а, например, последовательность

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad n=1,2,...$$

фундаментальна в Q, но не имеет предела в Q (ее предел e – число ирраци-ональное). Пространство R можно рассматривать как результат «пополнения» Q. Процесс пополнения будет применен далее к неполным нормированным пространствам, элементами которых являются функции.

Напомним еще, что числа α («скаляры») в определении линейного нормированного пространства берутся либо вещественными, либо комплексными. В первом случае говорят, что X – вещественное нормированное пространство, во втором – комплексное нормированное пространство.

В одном и том же линейном пространстве X можно определить различные нормы. Две нормы называются *эквивалентными*, если они порождают одну и ту же сходимость (т.е. последовательность $\{f_n\}\subset X$, сходящаяся к элементу $f\in X$ по одной из норм, будет сходиться к f по другой и наоборот). Ясно, что для эквивалентности норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ достаточно, чтобы их отношение было ограничено сверху и снизу, т.е.

$$0<C_1\le\frac{\|f\|_1}{\|f\|_2}\le C_2<\infty, \; f\in X, \; f\ne 0.$$

Рассмотрим вещественное n-мерное координатное пространство R^n. Для элемента $x=(x_1,...,x_n)\in R^n$ определим нормы

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|, \tag{2}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,, \tag{3}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|\,. \tag{4}$$

Легко проверить, что каждое из написанных выражений удовлетворяет аксиомам нормы. Нормы $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, $\|x\|_\infty$ эквивалентны. В самом деле, справедливы очевидные неравенства

$$\max_i |x_i| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \le n\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \le n^{\frac{3}{2}} \max_i |x_i|\,.$$

Норма $\|x\|_2$ называется евклидовой или сферической, норма $\|x\|_1$ – октаэдрической, норма $\|x\|_\infty$ – кубической.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Любая норма $\|\cdot\|$ в R^n эквивалентна евклидовой (следовательно, любые две нормы эквивалентны между собой).*

Доказательство. Очевидно, что элементы

$$e^1 = (1,\ 0,\ \dots,\ 0),\quad e^2 = (0,\ 1,\ \dots,\ 0),\ \dots\quad e^n = (0,\ 0,\ \dots,\ 1)$$

образуют базис в R^n и элемент $x = (x_1, \dots, x_n)$ имеет представление

$$x = x_1 e^1 + \dots + x_n e^n\,. \tag{5}$$

Взяв норму $\|\cdot\|$ от обеих частей равенства (5) и пользуясь неравенством треугольника, получим $\|x\| = \|x_1 e^1 + \dots + x_n e^n\| \le |x_1|\|e^1\| + \dots + |x_n|\|e^n\|$.

Так как $|x_i| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} = \|x\|_2$, то, учитывая $\|e^1\| + \dots + \|e^n\| = n$,

придем к неравенству $\|x\| \le C\|x\|_2$ $(\mathrm{C} = \mathrm{n})$.

Обратное неравенство доказывается от противного. Предположим, что не найдется постоянной c, для которой $\|x\|_2 \le c\|x\|$.

Тогда для любого натурального m можно указать элемент x^m такой, что

$$\|x^m\|_2 > m\|x^m\|. \tag{6}$$

Рассмотрим последовательность $\{y^m\} \subset R^n$:

$$y^m = \frac{x^m}{\|x^m\|_2}\,. \tag{7}$$

С одной стороны, будем иметь $\|y^m\|_2 = 1$ и, следовательно, последовательность $\{y_j^m\}$ j-х координат ограничена. Тогда, пользуясь свойством

ђqdуеY bƎ dеdƎbУзе d еаqсоу Jqddуqуè