

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

А.В. Глушко, В.В. Провоторов, А.С. Рябенко

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЗАДАЧА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Учебное пособие

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2015

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Раздел 1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ	5
§ 1. Понятие нормированного пространства	5
§ 2. Функциональное пространство $CL_{\infty} [a, b]$	9
§ 3. Функциональные пространства $CL_p [a, b]$, $1 \leq p < \infty$ с метрикой уклонения в p -среднем	12
Раздел 2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	17
§ 1. Классификация линейных интегральных уравнений	17
§ 2. Уравнение Фредгольма с вырожденным ядром	21
§ 3. Теорема о разрешимости (общий случай)	28
§ 4. Альтернатива Фредгольма	35
§ 5. Метод последовательных приближений (метод итераций)	37
§ 6. Первоначальные сведения об операторах в нормированных и евклидовых пространствах	45
§ 7. Самосопряженный интегральный оператор	53
§ 8. Билинейное разложение симметричного ядра и его итераций	60
§ 9. Разложение истокообразной функции (теорема Гильберта–Шмидта)	71
§ 10. Билинейное разложение ядра и его итераций (продолжение)	73
§ 11. Интегральное уравнение с симметричным ядром	76
§ 12. Заключительные замечания	80
Раздел 3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА (КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ, РЕШЕНИЕ РЯДАМИ, СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ)	82
§ 1. Линейный дифференциальный оператор второго порядка	82
§ 2. Регулярная краевая задача и задача Штурма–Лиувилля (предварительные сведения)	85
§ 3. δ -функция, фундаментальное решение, функция Грина	87
§ 4. Эквивалентность задачи Штурма–Лиувилля интегральному уравнению. Теорема Стеклова	95
§ 5. Общая краевая задача. Задача с параметром. Симметризуемые Задачи	100
§ 6. Уравнения с полиномиальными и рациональными коэффициентами. Обыкновенные и особые точки. Решение точками	103
§ 7. Уравнения Гаусса, Бесселя. Цилиндрические функции	113
§ 8. О сингулярных краевых задачах	123
Библиографический список	138

Тогда сходимость последовательности элементов $\{f_n\} \subset X$ к $f \in X$ определяется следующим образом: *последовательность элементов $\{f_n\} \subset X$ называется сходящейся к элементу $f \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $\|f - f_n\| < \varepsilon$.*

При этом пишут

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty}^X f_n \quad \text{или} \quad f_n \xrightarrow{X} f.$$

Определенная таким образом сходимость в X называется сходимостью по норме. Позже (см. замечание в конце параграфа) будут рассмотрены понятия метрического пространства и сходимости в нем. Нормированное пространство является метрическим пространством с метрикой (1). Поэтому мы будем называть сходимость по норме также сходимостью по метрике (1).

Сходящаяся по норме последовательность обладает привычными свойствами:

- 1) сходящаяся в X последовательность может иметь только один предельный элемент;
- 2) всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится, причем к тому же пределу;
- 3) сходящаяся в X последовательность ограничена по норме.

Доказательства предложений 1 и 2 предоставляются в качестве упражнения читателю.

Для примера докажем свойство 3.

Из сходимости $f_n \xrightarrow{X} f$ следует, что для $\varepsilon = 1$ найдется номер N такой, что $\|f - f_n\| < 1$ при $n > N$. По неравенству треугольника при $n > N$ получим $\|f_n\| = \|f_n - f + f\| \leq \|f - f_n\| + \|f\| < \|f\| + 1$. Следовательно, если взять в качестве M максимальное из чисел $\|f_1\|, \dots, \|f_N\|, \|f\| + 1$, то $\|f_n\| \leq M$ для всех $n \geq 1$. Это и означает, что последовательность $\{f_n\}$ ограничена (по норме).

Важным понятием, связанным со сходимостью, является понятие полноты пространства X .

Определение. Последовательность $\{f_n\} \subset X$ называется фундаментальной в X (или сходящейся в себе), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что как только $n > N$, $m > N$, то $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$.

Определение. Нормированное пространство X называется полным, если любая фундаментальная последовательность элементов этого

пространства сходится к элементу, принадлежащему этому пространству.

Полное нормированное пространство называется банаховым пространством.

Напомним, что с понятием полноты мы встречались в математическом анализе при построении теории вещественных чисел. Полезно оглянуться на эту теорию с новой точки зрения. Пусть Q обозначает множество рациональных чисел, R – множество вещественных чисел. $Q(R)$ как линейное пространство, элементами которого являются рациональные (вещественные) числа, а скалярами – опять же рациональные (вещественные) числа. $Q(R)$ становится нормированным пространством, если в качестве нормы числа брать его модуль. Нормированное таким образом пространство R – полное (т.е. банахово), а пространство Q неполно. В самом деле, в R любая фундаментальная последовательность имеет предел, а, например, последовательность

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

фундаментальна в Q , но не имеет предела в Q (ее предел e – число иррациональное). Пространство R можно рассматривать как результат «пополнения» Q . Процесс пополнения будет применен далее к неполным нормированным пространствам, элементами которых являются функции.

Напомним еще, что числа α («скаляры») в определении линейного нормированного пространства берутся либо вещественными, либо комплексными. В первом случае говорят, что X – вещественное нормированное пространство, во втором – комплексное нормированное пространство.

В одном и том же линейном пространстве X можно определить различные нормы. Две нормы называются *эквивалентными*, если они порождают одну и ту же сходимость (т.е. последовательность $\{f_n\} \subset X$, сходящаяся к элементу $f \in X$ по одной из норм, будет сходиться к f по другой и наоборот). Ясно, что для эквивалентности норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ достаточно, чтобы их отношение было ограничено сверху и снизу, т.е.

$$0 < C_1 \leq \frac{\|f\|_1}{\|f\|_2} \leq C_2 < \infty, \quad f \in X, \quad f \neq 0.$$

Рассмотрим вещественное n -мерное координатное пространство R^n . Для элемента $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ определим нормы

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \tag{2}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (3)$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|. \quad (4)$$

Легко проверить, что каждое из написанных выражений удовлетворяет аксиомам нормы. Нормы $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, $\|x\|_\infty$ эквивалентны. В самом деле, справедливы очевидные неравенства

$$\max_i |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} \leq n^{\frac{3}{2}} \max_i |x_i|.$$

Норма $\|x\|_2$ называется евклидовой или сферической, норма $\|x\|_1$ – октаэдрической, норма $\|x\|_\infty$ – кубической.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма. Любая норма $\|\cdot\|$ в R^n эквивалентна евклидовой (следовательно, любые две нормы эквивалентны между собой).

Доказательство. Очевидно, что элементы

$$e^1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e^2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots \quad e^n = (0, 0, \dots, 1)$$

образуют базис в R^n и элемент $x = (x_1, \dots, x_n)$ имеет представление

$$x = x_1 e^1 + \dots + x_n e^n. \quad (5)$$

Взяв норму $\|\cdot\|$ от обеих частей равенства (5) и пользуясь неравенством треугольника, получим $\|x\| = \|x_1 e^1 + \dots + x_n e^n\| \leq |x_1| \|e^1\| + \dots + |x_n| \|e^n\|$.

Так как $|x_i| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} = \|x\|_2$, то, учитывая $\|e^1\| + \dots + \|e^n\| = n$,

придем к неравенству $\|x\| \leq C \|x\|_2$ ($C = n$).

Обратное неравенство доказывается от противного. Предположим, что не найдется постоянной c , для которой $\|x\|_2 \leq c \|x\|$.

Тогда для любого натурального m можно указать элемент x^m такой, что

$$\|x^m\|_2 > m \|x^m\|. \quad (6)$$

Рассмотрим последовательность $\{y^m\} \subset R^n$:

$$y^m = \frac{x^m}{\|x^m\|_2}. \quad (7)$$

С одной стороны, будем иметь $\|y^m\|_2 = 1$ и, следовательно, последовательность $\{y_j^m\}$ j -х координат ограничена. Тогда, пользуясь свойством