

Б.А. ЕСИПОВ

**МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ  
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

**2007**



**САМАРА**

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

*Б.А. ЕСИПОВ*

## МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия*

САМАРА  
Издательство СГАУ  
2007

УДК 519.8  
ББК 22.1  
Е 833



**Инновационная образовательная программа  
«Развитие центра компетенции и подготовка  
специалистов мирового уровня в области аэро-  
космических и геоинформационных технологий»**

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. А. Н. К о в а р ц е в,  
д-р физ.-мат. наук, проф. С. Я. Ш а т с к и х

*Есипов Б.А.*

Е 833

**Методы оптимизации и исследование операций: учеб. пособие /  
Б.А.Есипов. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2007. –  
180 с. : ил.**

**ISBN 978-5-7883-0640-7**

В учебном пособии дано краткое изложение основных методов оптимизации и исследования операций. Материал пособия основан на лекциях, читаемых автором для студентов факультета «Информатика», и соответствует программам курсов «Методы оптимизации», «Теория игр и исследование операций», «Теория принятия решений». Настоящее пособие является вспомогательным материалом к прослушиваемому курсу лекций, поэтому применяется конспективный стиль изложения. Приведены алгоритмы и примеры их работы, а также рисунки, поясняющие суть методов, что позволяет студентам разрабатывать компьютерные программы для выполнения индивидуальных заданий курсовой работы.

Предназначено для студентов специальностей «Прикладная математика и информатика», «Автоматизированные системы обработки информации и управления», а также аспирантов и специалистов, интересующихся методами оптимизации и исследования операций. Подготовлено на кафедре «Информационные системы и технологии» Самарского государственного аэрокосмического университета.

УДК 519.8  
ББК 22.1

**ISBN 978-5-7883-0640-7**

© Есипов Б.А., 2007  
© Самарский государственный  
аэрокосмический университет, 2007

# Оглавление

Введение.....	6
1. Методология системного анализа и исследование операций.....	7
1.1. Системный анализ, система, оптимизация.....	7
1.2. Схема операционного проекта.....	8
1.3. Особенности математического моделирования операций.....	11
1.4. Постановка задачи исследования операций в детерминированном случае и в условиях неопределенности.....	12
1.5. Пример математического моделирования операции (задача о краске).....	13
2. Линейное программирование (ЛП).....	16
2.1. Общая и основная задачи ЛП.....	17
2.2. Геометрическая интерпретация задачи ЛП.....	19
2.3. Идея симплекс-метода решения задачи ЛП.....	21
2.4. Симплекс-таблица, стандартный алгоритм симплекс-преобразования.....	23
2.5. Алгоритм отыскания опорного решения задачи ЛП.....	25
2.6. Алгоритм отыскания оптимального решения задачи ЛП.....	26
2.7. Алгоритм получения первого базисного решения с использованием симплекс – процедуры (метод искусственного базиса).....	29
2.8. Вырожденная задача ЛП.....	31
2.9. Двойственная задача ЛП.....	32
3. Транспортные задачи (ТЗ).....	35
3.1. Математическая модель ТЗ по критерию стоимости.....	35
3.2. Нахождение опорного плана транспортной задачи.....	36
3.3. Оптимизация плана ТЗ, распределительный метод.....	38
3.4. Метод потенциалов решения ТЗ.....	40
3.5. Решение ТЗ с неправильным балансом.....	43
3.6. ТЗ по критерию времени, типы критериев.....	45
4. Дискретное программирование.....	48
4.1. Особенности задач дискретного программирования.....	49
4.2. Примеры моделей задач дискретного программирования.....	50
4.2.1. Задача о покрытии.....	54
4.2.2. Задача о коммивояжёре.....	54
4.2.3. Задача о раскрое материала.....	55
4.2.4. Задача о ранце.....	58
4.3. Алгоритм решения задачи о ранце.....	58
4.4. Решение задач ЛЦП методом отсечений Гомори.....	61
4.5. Метод ветвей и границ (МВГ).....	66

	А	
4.6.	Алгоритм МВГ для задачи ЛП	68
4.7.	Алгоритмы решения задач булевого программирования	72
5.	Динамическое программирование (ДП)	78
5.1	Принцип оптимальности Р.Беллмана	79
5.2.	Решение графовых задач на основе принципа Беллмана	81
5.3.	Функциональное уравнение Беллмана	82
5.4.	Задачи распределения ресурсов	84
5.4.1.	Классическая задача распределения ресурсов	84
5.4.2.	Неоднородные этапы и распределение ресурсов по $n$ отраслям	84
5.4.3.	Распределение ресурсов с резервированием	85
5.4.4.	Распределение ресурсов с «вложением доходов»	87
5.5.	Расширение модели задач динамического программирования	89
5.6.	Пример решения задачи распределения ресурсов	91
5.7.	Эффективность динамического программирования	93
6.	Нелинейное программирование	95
6.1.	Особенности задач нелинейного программирования	95
6.2.	Прямые методы одномерной оптимизации нелинейных функций без ограничений	97
6.3.	Градиентные методы многомерной оптимизации	99
6.3.1.	Классический градиентный метод	100
6.3.2.	Покоординатный метод	101
6.3.3.	Метод наискорейшего спуска и его модификации	101
6.4.	Метод деформируемого многогранника Нелдера-Мида	101
6.5.	Задача НЛП с ограничениями-равенствами	103
6.6.	Выпуклое НЛП	106
6.7.	Теорема Куна-Таккера для выпуклого НЛП	108
6.8.	Квадратичное программирование	109
6.9.	Методы возможных направлений	114
6.10.	Метод проекции градиента	118
6.11.	Методы штрафных и барьерных функций	121
6.12.	Метод скользящего допуска	127
7.	Особенности современной теории принятия оптимальных решений	130
7.1.	Общая постановка задачи принятия решения	131
7.2.	Классификация задач принятия решений	133
7.3.	Многокритериальная оптимизация	135
7.4.	Определение множества Парето	138
7.5.	Методы условной многокритериальной оптимизации	140
8.	Игровые модели принятия решений	144
8.1.	Основные понятия теории игр	144
8.2.	Платежная матрица антагонистической игры, принцип минимакса	145
8.3.	Решение игр в смешанных стратегиях	147

8.4. Упрощение игр и аналитическое решение игр 2×2.....	148
8.5. Геометрическое решение игр .....	150
8.6. Решение игр со многими стратегиями на основе метода линейного программирования .....	153
8.7. Биматричные игры.....	155
8.8. Кооперативные игры .....	156
9. Элементы теории статистических оптимальных решений .....	159
9.1. Принятие решений при известных априорных вероятностях .....	160
9.2. Методы принятия решений в условиях априорной неопределенности .....	162
9.3. Планирование эксперимента при принятии решений.....	163
9.4. Многоэтапное принятие решений.....	165
10. Экспертные процедуры для принятия решений.....	169
10.1. Общая схема экспертизы .....	169
10.2. Задача оценивания .....	170
10.3. Подготовка экспертизы .....	170
10.4. Методы обработки экспертной информации.....	171
10.5. Метод Делфи для численной оценки .....	173
10.6. Строгое ранжирование .....	174
10.7. Нестрогое ранжирование.....	175
10.8. Метод попарных сравнений .....	176
Список литературы.....	178

## ВВЕДЕНИЕ

Одним из главных направлений деятельности специалиста в любой сфере является совершенствование существующих и создание новых изделий, систем или технологий: создание лучших машин, экономное расходование ресурсов, сокращение сроков строительства и т.д.

Обычно та или иная цель может быть достигнута разными путями, но всегда важно знать наилучший из них, так как в реальных условиях приходится считаться с ограниченностью материальных ресурсов и времени, расходуемых на достижение цели. Понятие «лучший» начинает что-либо означать тогда, когда назван количественный показатель или критерий качества принимаемого решения. Например, изделие А лучше изделия В с точки зрения затрат материала; система С лучше системы D по показателю надежности и т.п. Вот почему получение наилучших вариантов возможно только при количественном описании предметной области, т.е. на основе математической модели.

Методология анализа сложных систем, их математическое моделирование и нахождение на этой основе наилучших (оптимальных) решений в общем виде изучается в науке «исследование операций». В рамках этого общего направления изучаются и математические «методы оптимизации». Последнее название применяют для методов нахождения экстремумов функций и функционалов, когда математическая модель задачи уже сформулирована.

Большой вклад в развитие методологии исследования операций и методов оптимизации внесли российские и зарубежные ученые: Л.В.Канторович, Л.С.Понтрягин, Н.Н.Моисеев, Дж. Данциг, Г.Кун и А.Таккер, Р.Беллман, Р.Гомори и многие другие.

При подготовке рукописи этой книги использован опыт преподавания на факультете информатики Самарского государственного аэрокосмического университета. Это предопределило перечень вопросов, которые в первую очередь должны были быть освещены. При изложении автор предельно кратко старался излагать сугубо теоретические вопросы, оставляя место основным идеям и методам, имеющим универсальное значение. Особый акцент сделан на практические алгоритмы решения разнообразных задач, которые можно положить в основу разрабатываемых компьютерных программ.

Учебное издание

*Есинов Борис Алексеевич*

**МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

*Учебное пособие*

Технический Н. Н. Павлова  
Редакторская обработка В. С. Телепова  
Корректорская обработка Е. А. Ларинова  
Доверстка А. С. Кочулова

Подписано в печать 20.11.07. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Печ. л. 11,25.

Тираж 120 экз. Заказ 209 ИП-77/2007

Самарский государственный  
аэрокосмический университет.  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

---

Изд-во Самарского государственного  
аэрокосмического университета.  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.