МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

С.А. Переселков,
Е.Г. Беломытцева,
В.Е. Чернов

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Учебно-методическое пособие для вузов

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2014

§ 1. ДИСКРЕТНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Определение

▪ Случайной величиной называется величина, которая в результате испытания принимает одно и только одно из некоторого множества возможных значений. Причем до проведения испытания, нам неизвестно какое именно значение примет случайная величина. Для обозначения случайных величин используются заглавные буквы: X, Y, Z…

▪ Совокупность всех значений случайной величины называется ***возможными значениями*** случайной величины. Для обозначения ***возможных значений*** случайной величины используются соответствующие строчные буквы: x, y, z…Например, совокупность x_1, x_2, x_3, … – возможные значения случайной величины X. Говорят, что случайная величина X определена на множестве возможных значений x_1, x_2, x_3, … Согласно определению случайной величины результатом испытания может быть появление одного из следующих случайных событий:

$$A_1:\{X=x_1\},\ A_2:\{X=x_2\},\ A_3:\{X=x_3\},\ A_4:\{X=x_4\},\ \ldots$$

Эти случайные события обладают свойствами:

1) совокупность событий $A_1, A_2, A_3, \ldots$ образует полную группу:

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots = \sigma. \qquad (1.1)$$

2) любые два события A_i и A_j являются несовместными:

$$A_i A_j = \gamma. \qquad (1.2)$$

Отсюда следует, что

$$\sum_i P(A_i) = 1 \text{ или } \sum_i P(X = x_i) = 1. \qquad (1.3)$$

Случайная величина, определенная на дискретном множестве возможных значений, называется ***дискретной случайной величиной***. Возможные значения дискретной случайной величины представляют собой изолированные точки на оси вещественных значений (см. рис. 1.1).

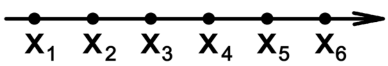

Рис 1.1. Возможные значения дискретной случайной величины

▪ Случайная величина, определенная на непрерывном интервале возможных значений от x_1 до x_2, называется ***непрерывной случайной величиной***. Очевидно, возможные значения непрерывной случайной величины представляют собой точки, принадлежащие непрерывному интервалу (x_1, x_2) на оси вещественных значений.

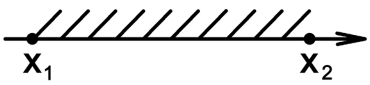

Рис. 1.2. Возможные значения непрерывной случайной величины

Согласно выражению (3.8), разница значений функций распределения: $F(x_2)-F(x_1)$ равна вероятности случайного события. Поскольку вероятность события больше нуля, то:

$$F(x_2)-F(x_1)\geq 0. \tag{3.9}$$

Следовательно,

$$F(x_2)\geq F(x_1). \tag{3.10}$$

ч. т. д.

Свойство 4

$$\lim_{x\to -\infty} F(x)=0. \tag{3.11}$$

Доказательство

Если $x\to -\infty$, то событие $A:\{X<x\}$ является невозможным событием. Как известно, вероятность невозможного события равна нулю. Таким образом,

$$\lim_{x\to -\infty} F(x)=\lim_{x\to -\infty} P(X<x)=0 \tag{3.12}$$

ч. т. д.

Свойство 5

$$\lim_{x\to +\infty} F(x)=1. \tag{3.13}$$

Доказательство

Если $x\to\infty$, то событие $A:\{X<x\}$ является достоверным событием. Как известно, вероятность достоверного события равна 1. Таким образом,

$$\lim_{x\to\infty} F(x)=\lim_{x\to\infty} P(X<x)=1. \tag{3.14}$$

ч. т. д.

Рассмотрим график функции распределения вероятностей дискретной случайной величины, заданной таблицей:

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	…	x_N
P	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	…	p_N

Согласно определению (3.2):

$$F(x)=\begin{cases} 0, & if \quad x\leq x_1 \\ p_1, & if \quad x_1<x\leq x_2 \\ p_1+p_2, & if \quad x_2<x\leq x_3 \\ \dots & \\ p_1+p_2+\dots+p_N=1, & if \quad x>x_N \end{cases} \tag{3.15}$$

Таким образом, график функции распределения дискретной случайной величины имеет вид, представленный на рис. 3.1.

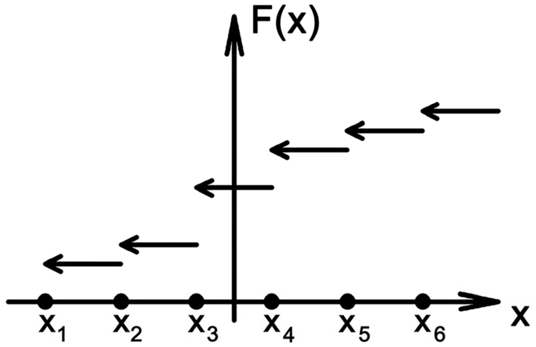

Рис. 3.1. График функции распределения дискретной случайной величины

Рассмотрим график функции непрерывной случайной величины, определенной на непрерывном интервале (x_1, x_2) на рис. 3.2.

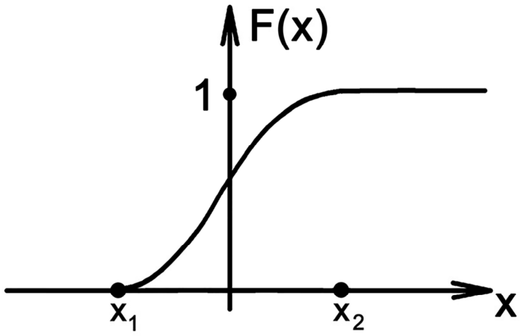

Рис. 3.2. График функции распределения непрерывной случайной величины, заданной на интервале (x_1, x_2)

Согласно свойствам функции распределения, это должен быть график функции, не убывающей на интервале (x_1, x_2), равной нулю при $x \le x_1$, равной единице при $x \ge x_2$ (см. рис. 3.2).

§ 4. ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Определение

▪ ***Функцией плотности вероятностей*** непрерывной случайной величины называют функцию $f(x)$, определяемую производной функции распределения:

$$f(x) \overset{def}{=} \frac{dF(x)}{dx}. \tag{4.1}$$

Свойство 1

$$f(x) \ge 0. \tag{4.2}$$

Доказательство

Согласно определению (4.1) функция плотности вероятностей является производной функции распределения. Так как функция распределения случайной величины является неубывающей функцией, то ее производная является неотрицательной функцией:

$$f(x) \geq 0. \tag{4.3}$$

ч. т. д.

Свойство 2

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx, \tag{4.4}$$

Доказательство

Из определения плотности вероятностей (4.1) следует, что:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C(x_0), \tag{4.5}$$

где значение константы интегрирования $C(x_0)$ зависит от нижнего предела интервала интегрирования x_0. Пусть $x_0 \to -\infty$. В этом случае:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx + C(-\infty). \tag{4.6}$$

Согласно свойству функции распределения вероятностей (3.11):

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = C(-\infty) = 0. \tag{4.7}$$

Таким образом,
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{4.8}$$

ч. т. д.

Свойство 3 (***«условие нормировки»***)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1, \tag{4.9}$$

Доказательство

Согласно свойству функции распределения (3.13):

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \tag{4.10}$$

ч. т. д.

Свойство 4

$$P(x_1 \leq X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \tag{4.11}$$

Доказательство

Согласно свойству функции распределения (3.8):

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \tag{4.12}$$

Используя представление функции распределения (4.4),