

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

## **ВЕКТОРЫ. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ**

*Учебно-методическое пособие*

Составители:

В. В. Корзунина, К. П. Лазарев,  
З. А. Шабунина

Воронеж  
Издательский дом ВГУ  
2017

# Содержание

<b>1. Введение</b> .....	4
<b>2. Векторы</b> .....	4
2.1. Понятие вектора . . . . .	4
2.2. Операции сложения векторов и умножение вектора на число. Свойства операций . . . . .	7
2.3. Вещественное линейное пространство. Подпространство линейного пространства . . . . .	12
2.4. Линейная комбинация, линейная зависимость и линейная независимость векторов в линейном пространстве . . . . .	16
2.5. Линейная зависимость и независимость векторов в $V_3$ . .	19
2.6. Размерность линейного пространства. Подпространства в $V_3$ и их размерность . . . . .	22
2.7. Базис линейного пространства. Координаты вектора в базисе линейного пространства. Свойства координат . . . . .	24
2.8. Аффинная система координат на прямой, на плоскости и в пространстве. Декартова прямоугольная система координат. Аффинные координаты точки. Декартовы координаты точки . . . . .	26
2.9. Проекция точек и векторов. Свойства проекций . . . . .	27
2.10. Скалярное произведение двух векторов. Его свойства, вычисление и применение . . . . .	34
2.11. Векторное произведение двух векторов. Его свойства, вычисление и применение . . . . .	39
2.12. Смешанное произведение. Его свойства, вычисление и применение . . . . .	47
<b>Список литературы</b> .....	54

начало вектора  $\vec{z}$  принадлежит плоскости  $\Pi_2$ , а конец — плоскости  $\Pi_1$ . Поэтому векторы  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  и любые три или два из них компланарны, а любые четыре или пять векторов, содержащих  $\vec{z}$ , некомпланарны.

Из определения следует, что коллинеарные векторы компланарны, нулевые векторы коллинеарны и компланарны.

**Определение 3.** Ненулевые коллинеарные векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{A'B'}$  называются одинаково (противоположно) направленными, если

а) отрезки  $AB$  и  $A'B'$  лежат на одной прямой, отрезок  $AB$  принадлежит лучу  $l$  с началом в точке  $A$ , отрезок  $A'B'$  принадлежит лучу  $l'$  с началом в точке  $A'$  и один из этих лучей содержит другой, см. рис. 3 (ни один из этих лучей не содержит другой, см. рис. 4),

б) отрезки  $AB$  и  $A'B'$  лежат на параллельных прямых, точки  $B$  и  $B'$  лежат по одну сторону от прямой  $AA'$ , т.е. отрезок  $BB'$  не пересекает отрезок  $AA'$ , см. рис. 5 (точки  $B$  и  $B'$  лежат по разные стороны от прямой  $AA'$ , т.е. отрезок  $BB'$  пересекает отрезок  $AA'$ , см. рис. 6).

Будем обозначать  $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{A'B'}$  — одинаковую направленность векторов и  $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{A'B'}$  — противоположную направленность.

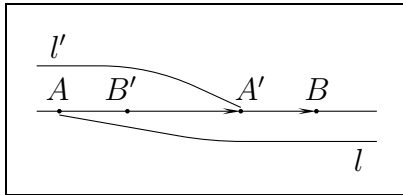


Рис. 4

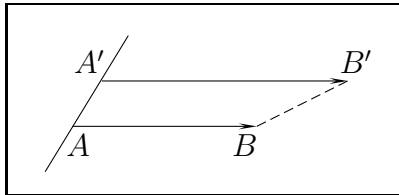


Рис. 5

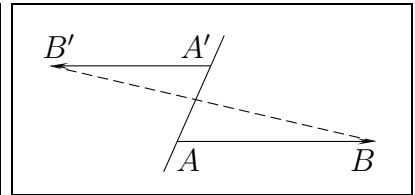


Рис. 6

**Определение 4.** Два ненулевых вектора  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  называются равными (обозначение  $\vec{x} = \vec{y}$ ), если  $\vec{x} \uparrow\uparrow \vec{y}$  и  $|\vec{x}| = |\vec{y}|$ , т.е. они одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

Нулевые векторы также считаются равными.

Понятие равенства векторов отличается от понятия равенства, например, точек. Равенство точек — это совпадение. Но существуют несовпадающие между собой векторы, равные по этому определению, например, векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{A'B'}$  в параллелограмме  $ABB'A'$ , в котором стороны

$AB$  и  $A'B'$  параллельны см. рис.13. В то же время при  $B \neq A$  имеем  $\overline{AB} \neq \overline{BA}$ , так как эти векторы противоположно направлены, хотя отрезки  $AB$  и  $BA$  как множества точек равны.

**Лемма 2.1.2.** Из любой точки  $A'$  можно провести единственный вектор  $\overline{A'B'}$ , равный данному вектору  $\overline{AB}$ .

Доказательство следует из определения 4. При этом говорят, что вектор  $\overline{AB}$  перенесли в точку  $A'$ .

### Обозначения.

$V_3$  — множество всех геометрических векторов,

$V_2(\Pi)$  — подмножество векторов, параллельных плоскости  $\Pi$ ,

$V_1(l)$  — подмножество векторов, параллельных прямой  $l$ ,

$V_0$  подмножество, состоящее только из  $\vec{0}$ .

## 2.2. Операции сложения векторов и умножение вектора на число. Свойства операций

### Определение 1. (Сложение векторов.)

Пусть  $\vec{x}, \vec{y} \in V_3$ . От произвольной точки  $A$  отложим вектор  $\overline{AB} = \vec{x}$  и затем вектор  $\overline{BC} = \vec{y}$ . Суммой  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  называется вектор  $\overline{AC}$ , он обозначается  $\vec{x} + \vec{y}$ . Операция, сопоставляющая двум векторам их сумму, называется сложением векторов.

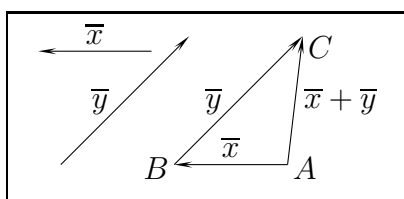


Рис. 7

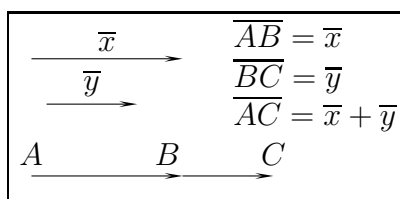


Рис. 8

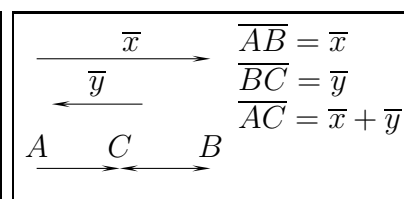


Рис. 9

На рис. 7 изображено сложение неколлинеарных векторов. Этот способ сложения называется правилом треугольника. Заметим, что, выбрав другую точку  $A'$  и векторы  $\overline{A'B'} = \vec{x}$  и  $\overline{B'C'} = \vec{y}$ , мы получили бы в качестве суммы другой вектор  $\overline{A'C'}$ , равный вектору  $\overline{AC}$ . На рисунках 8, 9, 10 изображено сложение коллинеарных одинаково и противоположно направленных векторов  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$ .

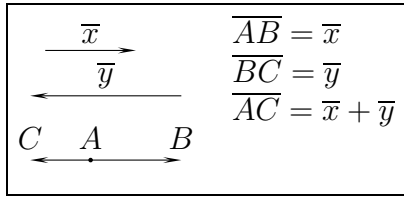


Рис. 10

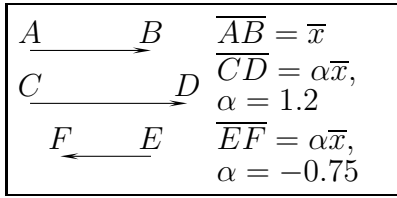


Рис. 11

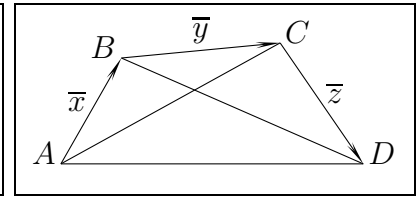


Рис. 12

**Определение 2.** (Умножение вектора на число.)

Произведением вектора  $\bar{x}$  на число  $\alpha \in \mathbb{R}$  называется вектор  $\bar{y}$ , обозначаемый  $\alpha\bar{x}$ , и удовлетворяющий условиям:

- 1<sup>0</sup> а)  $|\bar{y}| = |\alpha||\bar{x}|$  при  $\alpha \neq 0$  и  $\bar{x} \neq \bar{o}$ ;
- б)  $\bar{y} \uparrow\uparrow \bar{x}$  при  $\alpha > 0$ ,  $\bar{y} \uparrow\downarrow \bar{x}$  при  $\alpha < 0$ ,
- 2<sup>0</sup>  $\bar{y} = \bar{o}$  при  $\alpha = 0$  или  $\bar{x} = \bar{o}$ .

Операция, сопоставляющая вектору  $\bar{x}$  и числу  $\alpha$  вектор  $\alpha\bar{x}$  называется умножением вектора на число.

Сложение векторов и умножение вектора на число называются линейными операциями.

На рис. 11 изображены результаты умножения на 1.2 и  $-0.75$ .

**Теорема 2.2.1 (Свойства линейных операций).**

- 1<sup>0</sup>  $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V_3 \quad (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$ .
- 2<sup>0</sup>  $\forall \bar{x} \in V_3 \quad \bar{x} + \bar{o} = \bar{o} + \bar{x} = \bar{x}$ .
- 3<sup>0</sup>  $\forall \bar{x} \in V_3 \exists \bar{y} \in V_3 \quad \bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x} = \bar{o}$ . Такой вектор  $\bar{y}$  — единственный и он равен  $(-1)\bar{x}$ . (Вектор  $(-1)\bar{x}$  называется противоположным к вектору  $\bar{x}$  и обозначается  $-\bar{x}$ .)

$$4^0 \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in V_3 \quad \bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}.$$

$$5^0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \bar{x} \in V_3 \quad \alpha(\beta\bar{x}) = (\alpha\beta)\bar{x}.$$

$$6^0 \quad \forall \bar{x} \in V_3 \quad 1\bar{x} = \bar{x}.$$

$$7^0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \bar{x}, \bar{y} \in V_3 \quad \alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}.$$

$$8^0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \bar{x} \in V_3 \quad (\alpha + \beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}.$$

**Доказательство.**

1<sup>0</sup> Возьмём векторы  $\overline{AB} = \bar{x}$ ,  $\overline{BC} = \bar{y}$ ,  $\overline{CD} = \bar{z}$ . Имеем  $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = (\overline{AB} + \overline{BC}) + \overline{CD} = \overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AD}$ ,  $\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = \overline{AB} + (\overline{BC} + \overline{CD}) = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AD}$ . Следовательно,  $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$ .

На рис. 12 изображён случай, когда  $\bar{x} \nparallel \bar{y}$ ,  $\bar{y} \nparallel \bar{z}$ .

2° Пусть  $\bar{x} = \overline{AB}$  и  $\bar{o} = \overline{BB} = \overline{AA}$ , тогда  $\bar{x} + \bar{o} = \overline{AB} + \overline{BB} = \overline{AB} = \bar{x}$ ,  $\bar{o} + \bar{x} = \overline{AA} + \overline{AB} = \overline{AB} = \bar{x}$ .

3° Пусть  $\bar{x} = \overline{AB}$ . Тогда  $(-1)\bar{x} = \overline{BA}$ . Отсюда  $\bar{x} + (-1)\bar{x} = \overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA} = \bar{o}$  и  $(-1)\bar{x} + \bar{x} = \overline{BA} + \overline{AB} = \overline{BB} = \bar{o}$ .

Если  $\bar{x} + \bar{y} = \bar{o}$ , то  $(-1)\bar{x} + (\bar{x} + \bar{y}) = (-1)\bar{x} + \bar{o}$ ,  $((-1)\bar{x} + \bar{x}) + \bar{y} = (-1)\bar{x}$ ,  $\bar{o} + \bar{y} = (-1)\bar{x}$ , и, следовательно,  $\bar{y} = (-1)\bar{x}$ .

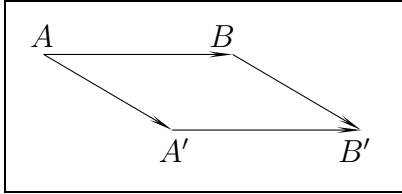


Рис. 13

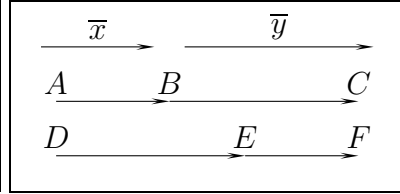


Рис. 14

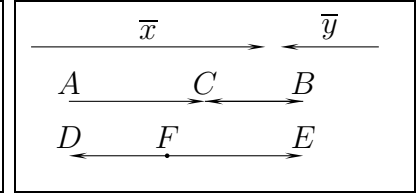


Рис. 15

4° Для неколлинеарных векторов  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ , построим параллелограмм  $ABBA'$  так, чтобы  $\bar{x} = \overline{AB}$ ,  $\bar{y} = \overline{BB'}$  рис.13. Тогда  $\bar{x} = \overline{A'B'}$ ,  $\bar{y} = \overline{AA'}$ . Отсюда  $\bar{x} + \bar{y} = \overline{AB} + \overline{BB'} = \overline{AB'}$  и  $\bar{y} + \bar{x} = \overline{AA'} + \overline{A'B'} = \overline{AB'}$ , т.е. утверждение доказано. Для коллинеарных векторов, содержащих  $\bar{o}$  или противоположный вектор, утверждение следует из 2° или 3°.

Рассмотрим ненулевые векторы  $\bar{x} \parallel \bar{y}$ . На рис.14 представлен случай  $\bar{x} \uparrow \bar{y}$ :  $\overline{AB} = \overline{EF} = \bar{x}$  и  $\overline{BC} = \overline{DE} = \bar{y}$ . Имеем  $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \bar{x} + \bar{y}$ ,  $\overline{DF} = \overline{DE} + \overline{EF} = \bar{y} + \bar{x}$ . При этом  $\overline{AC} \uparrow \bar{x}$ ,  $\overline{DF} \uparrow \bar{x}$  и  $|\overline{AC}| = |\bar{x}| + |\bar{y}|$ ,  $|\overline{DF}| = |\bar{y}| + |\bar{x}|$ . Отсюда  $\overline{AC} \uparrow \overline{DF}$  и  $|\overline{AC}| = |\overline{DF}|$ . Следовательно,  $\overline{AC} = \overline{DF}$ , т.е.  $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ .

На рис. 15 представлен случай  $\bar{x} \downarrow \bar{y}$  и без ограничения общности  $|\bar{x}| > |\bar{y}|$ :  $\overline{AB} = \overline{DE} = \bar{x}$  и  $\overline{BC} = \overline{FD} = \bar{y}$ . Тогда  $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \bar{x} + \bar{y}$ ,  $\overline{FE} = \overline{FD} + \overline{DE} = \bar{y} + \bar{x}$ . При этом  $\overline{AC} \uparrow \bar{x}$ ,  $\overline{FE} \uparrow \bar{x}$  и  $|\overline{AC}| = |\bar{x}| - |\bar{y}|$ ,  $|\overline{FE}| = |\bar{x}| - |\bar{y}|$ . Отсюда  $\overline{AC} \uparrow \overline{FE}$  и  $|\overline{AC}| = |\overline{FE}|$ . Следовательно,  $\overline{AC} = \overline{FE}$ , т.е.  $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ .

5° При  $\alpha = 0$  или  $\beta = 0$ , или  $\bar{x} = \bar{o}$  свойство очевидно. В противном случае покажем а) равенство модулей векторов и б) их одинаковую направленность.

$$\text{а) } |\alpha(\beta\bar{x})| = |\alpha||\beta\bar{x}| = |\alpha||\beta||\bar{x}|, \quad |(\alpha\beta)\bar{x}| = |\alpha\beta||\bar{x}| = |\alpha||\beta||\bar{x}|.$$

б) При  $\alpha\beta > 0$  имеем  $(\alpha\beta)\bar{x} \uparrow \bar{x}$ . Для  $\alpha > 0, \beta > 0$  выполнено  $\beta\bar{x} \uparrow \bar{x}$ ,  $\alpha(\beta\bar{x}) \uparrow \beta\bar{x}$  и тогда  $\alpha(\beta\bar{x}) \uparrow \bar{x}$ . Для  $\alpha < 0, \beta < 0$  выполнено

$\beta\bar{x} \uparrow\downarrow \bar{x}$ ,  $\alpha(\beta\bar{x}) \uparrow\downarrow \beta\bar{x}$  и также  $\alpha(\beta\bar{x}) \uparrow\uparrow \bar{x}$ . Следовательно, при  $\alpha\beta > 0$  имеем  $(\alpha\beta)\bar{x} \uparrow\uparrow \alpha(\beta\bar{x})$ .

При  $\alpha\beta < 0$  имеем  $(\alpha\beta)\bar{x} \uparrow\downarrow \bar{x}$ . Для  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$  выполнено  $\beta\bar{x} \uparrow\uparrow \bar{x}$ ,  $\alpha(\beta\bar{x}) \uparrow\downarrow \beta\bar{x}$  и  $\alpha(\beta\bar{x}) \uparrow\downarrow \bar{x}$ . Для  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$  выполнено  $\beta\bar{x} \uparrow\downarrow \bar{x}$ ,  $\alpha(\beta\bar{x}) \uparrow\uparrow \beta\bar{x}$  и также  $\alpha(\beta\bar{x}) \uparrow\downarrow \bar{x}$ . Следовательно, при  $\alpha\beta < 0$  имеем  $(\alpha\beta)\bar{x} \uparrow\uparrow \alpha(\beta\bar{x})$ .

6° следует из определения умножения.

7° 1) Если один из векторов равен  $\bar{o}$  или  $\alpha = 0$ , то равенство верно.

2) Пусть  $\alpha > 0$  и  $\bar{x} \nparallel \bar{y}$ . Отложим  $\overline{AB} = \bar{x}$ ,  $\overline{BC} = \bar{y}$ ,  $\overline{AB'} = \alpha\overline{AB}$ , далее через точку  $B'$  проведём прямую, параллельную  $BC$ , до пересечения с прямой  $AC$  в точке  $C'$ , как показано на рис. 16. Из подобия  $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$  и пропорциональности  $|\overline{AB'}| : |\overline{AB}| = \alpha$  следуют равенства  $|\overline{B'C'}| : |\overline{BC}| = |\overline{AC'}| : |\overline{AC}| = \alpha$ . Отсюда в силу одинаковой направленности  $\overline{AC} \uparrow\uparrow \overline{AC'}$ ,  $\overline{BC} \uparrow\uparrow \overline{B'C'}$  получаем  $\overline{AC'} = \alpha\overline{AC}$ ,  $\overline{B'C'} = \alpha\overline{BC}$ . Из  $\triangle ABC$  и  $\triangle AB'C'$  получаем  $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$  и  $\overline{AC'} = \overline{AB'} + \overline{B'C'}$ . Итак,  $\overline{AC'} = \overline{AB'} + \overline{B'C'} = \alpha\overline{AB} + \alpha\overline{BC} = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$  и  $\overline{AC'} = \alpha\overline{AC} = \alpha(\overline{AB} + \overline{BC}) = \alpha(\bar{x} + \bar{y})$ , откуда  $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$ .

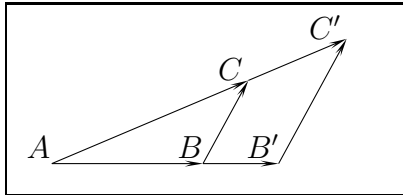


Рис. 16

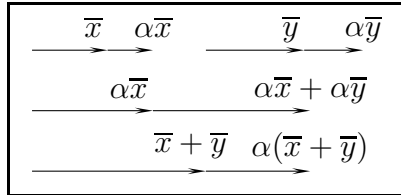


Рис. 17

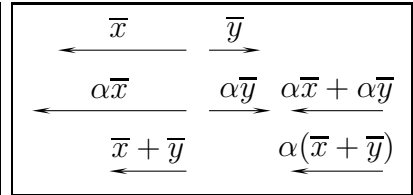


Рис. 18

3) Рассмотрим случай  $\alpha > 0$ ,  $\bar{x} \parallel \bar{y}$ ,  $\bar{x} \neq \bar{o}$ ,  $\bar{y} \neq \bar{o}$ .

Для  $\bar{x} \uparrow\uparrow \bar{y}$  см. рис. 17 имеем  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{x} + \bar{y}$ ,  $\alpha\bar{x}$ ,  $\alpha\bar{y}$ ,  $\alpha(\bar{x} + \bar{y})$ ,  $\alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$  одинаково направлены и  $|\alpha(\bar{x} + \bar{y})| = |\alpha||\bar{x} + \bar{y}| = \alpha(|\bar{x}| + |\bar{y}|)$ ,  $|\alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}| = |\alpha\bar{x}| + |\alpha\bar{y}| = \alpha|\bar{x}| + \alpha|\bar{y}| = \alpha(|\bar{x}| + |\bar{y}|)$ . Следовательно, в этом случае  $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$ .

Предположим, что  $\bar{x} \uparrow\downarrow \bar{y}$ .

При  $|\bar{x}| = |\bar{y}|$  имеем  $\bar{y} = (-1)\bar{x}$ . Отсюда следует, что  $\alpha\bar{x} + \alpha\bar{y} = \alpha\bar{x} + \alpha(-1)\bar{x} = \alpha\bar{x} - \alpha\bar{x} = \bar{o}$  и  $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha(\bar{x} + (-1)\bar{x}) = \alpha\bar{o} = \bar{o}$ . Итак, в этом случае  $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$ .