ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

Физико-математические науки

Математика

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Гасымова Н.Ф., *аспирант Бакинского государственного университета (Азербайджан)*

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ДВУКРАТНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ СЖИМАЮЩИХСЯ ОТОБРАЖЕНИЙ

В работе один класс двумерных нелинейных сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта решается методом сжимающих отображений и находится скорость сходимости последовательных приближений к точному решению.

Ключевые слова: *двумерные нелинейные сингулярные интегральные уравнения, приближенное решение одного класса двукратных нелинейных сингулярных интегральных уравнений, бицилиндрическая область, оператор суперпозиции, метод сжимающих отображений.*

APPROXIMATE SOLUTION OF A CLASS OF DOUBLE NONLINEAR SINGULAR EQUATIONS BY THE METHOD OF CONTRACTIVE MAPPINQS

In this work a class of second order singulyar integral equations with Hilbert kernel solved by the method of contractive mappings and found the speed of convergence of approximative sequences to exact solution.

Keywords: *the double nonlinear singular integral equations, approximate solution of the double nonlinear singular integral equations, the bicylindrical domain, the operator of superposition, the method of contractive mappings.*

§ 1. Некоторые обозначения и вспомогательные факты

Рассмотрим двумерное нелинейное сингулярное интегральное уравнение (НСИУ) вида

$$\varphi(x,y)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F\left[s,t,\varphi(s,t)\right]ctg\frac{s-x}{2}ctg\frac{t-y}{2}dsdt+f(x,y)\,, \tag{0.1}$$

где λ – положительный действительный параметр, F и f – заданные функции, а φ – искомая функция. Уравнения вида (0.1) встречаются при изучении предельных значений на остове бицилиндра аналитической в бицилиндрической области функции [1] и в теории сингулярных интегральных уравнений [2]. В настоящей работе мы будем решать уравнение (0.1) методом сжимающих отображений.

Через $C(T^2)$ обозначим пространство непрерывных на $T^2=[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$ и 2π – периодических по каждой из переменных функций с нормой

$$\|f\|_{C(T^2)}=\max_{(x,y)\in T^2}|f(x,y)|. \tag{1.1}$$

Пусть

$$\Delta_h^{1,0}f(x,y)=f(x+h,y)-f(x,y),\quad \Delta_\eta^{0,1}f(x,y)=f(x,y+\eta)-f(x,y),$$

$$\Delta^{1,1}_{h,\eta} f(x,y) = f(x,y) - f(x+h,y) - f(x,y+\eta) + f(x+h,y+\eta). \qquad (1.2)$$

Эти величины называются соответственно частной разностью по x с шагом h, по y с шагом η, и смешанной разностью по совокупности переменных с шагом h и η в точке (x,y).

Введем следующие обозначения:

$$\omega^{1,0}_f(\delta) = \sup_{|h|\le\delta} \left\|\Delta^{1,0}_h f(x,y)\right\|_{C(T^2)}, \quad \omega^{0,1}_f(\eta) = \sup_{|h|\le\eta} \left\|\Delta^{0,1}_h f(x,y)\right\|_{C(T^2)},$$

$$\omega^{1,1}_f(\delta,\eta) = \sup_{\substack{|h_1|\le\delta \\ |h_2|\le\eta}} \left\|\Delta^{1,1}_{h_1,h_2} f(x,y)\right\|_{C(T^2)}. \qquad (1.3)$$

С помощью этих характеристик в работе [3] введено пространство:

$$K^{1,1}_{\alpha,\beta} = \left\{ f \in C\left(T^2\right) \middle| \omega^{1,0}_f(\delta) = O\left(\delta^\alpha\right), \omega^{0,1}_f(\eta) = O\left(\eta^\beta\right), \omega^{1,1}_f(\delta,\eta) = O\left(\delta^\alpha \cdot \eta^\beta\right) \right\} \quad 0 < \alpha,\beta \le 1 \qquad (1.4)$$

с нормой

$$\|f\|_{K^{1,1}_{\alpha,\beta}} = \max\left\{ \|f\|_{C(T^2)}, \sup_{\delta>0} \frac{\omega^{1,0}_f(\delta)}{\delta^\alpha}, \sup_{\eta>0} \frac{\omega^{0,1}_f(\eta)}{\eta^\beta}, \sup_{\substack{\delta>0 \\ \eta>0}} \frac{\omega^{1,1}_f(\delta,\eta)}{\delta^\alpha \cdot \eta^\beta} \right\}$$

и доказано, что пространство $K^{1,1}_{\alpha,\beta}$ является банаховым.

Пусть $f \in C\left(T^2\right)$. Рассмотрим двумерный сингулярный интеграл с ядром Гильберта:

$$\tilde{f}(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s,t)\, ctg\frac{s-x}{2}\, ctg\frac{t-y}{2}\, dsdt. \qquad (1.5)$$

Отметим, что интеграл (1.5) понимается в смысле главного значения по Коши.

Из оценок, полученных в работах [4], [3] следует, что сингулярный оператор (СО)

$$(Sf)(x,y) = \tilde{f}(x,y) \qquad (1.6)$$

действует из $K^{1,1}_{\alpha,\beta}$ в $K^{1,1}_{\alpha,\beta}$ и ограничен при $0<\alpha,\ \beta<1$.

В пространстве $K^{1,1}_{\alpha,\beta}$ возьмем шар с центром в нуле радиуса R:

$$B^{1,1}_{\alpha,\beta}(R) = \left\{ \phi \in K^{1,1}_{\alpha,\beta} \middle| \|\phi\|_{K^{1,1}_{\alpha,\beta}} \le R \right\}.$$

В работе [5] доказано следующее:

<u>*Утверждение 1.*</u> Пусть $f \in K^{1,1}_{\alpha,\beta}$ и $p \ge 1$. Тогда верно неравенство:

$$\|f\|_{C(T^2)} \le l \|f\|^{\gamma}_{K^{1,1}_{\alpha,\beta}} \cdot \|f\|^{1-\gamma}_{L_p}, \qquad (1.7)$$

где $\gamma = \dfrac{1+p(\alpha+\beta)}{(1+\alpha p)(1+\beta p)}$,

$$l = \max\left\{ \frac{(1+\alpha p)(1+\beta p)}{(\alpha\beta p)^{1-\gamma}}, \frac{\sqrt[p]{4}\,(1+\alpha p)(1+\beta p)}{\alpha\beta p \pi^{1-\gamma}} \right\}. \qquad (1.8)$$

Далее нам понадобятся следующие утверждения, доказанные в [10].

<u>*Утверждение 2.*</u> Пусть функция $F(x,y,\phi): T^2 \times [-R,R] \to \Re$ удовлетворяет следующим условиям:

1) существует частная производная $F_\varphi'(x,y,\varphi)$ и существует $C_0>0$ такая, что для:

$$\forall \varphi_1,\varphi_2\in[-R,R]\ \left|F_\varphi'(x,y,\varphi_1)-F_\varphi'(x,y,\varphi_2)\right|\le C_0\left|\varphi_1-\varphi_2\right|;$$

2) $\exists C_1>0,\ \forall x_1,x_2\in[-\pi,\pi]\ \left|F(x_1,y,\varphi)-F(x_2,y,\varphi)\right|\le C_1\left|x_1-x_2\right|^\alpha$;

3) $\exists\ C_2>0,\ \forall\ y_1,y_2\in[-\pi,\pi]\ \left|F(x,y_1,\varphi)-F(x,y_2,\varphi)\right|\le C_2\left|y_1-y_2\right|^\beta$;

4) $\exists\ C_3>0,\ \forall\ x_1,y_1,x_2,y_2\in[-\pi,\pi]$

$\left|F(x_1,y_1,\varphi)-F(x_1,y_2,\varphi)-F(x_2,y_1,\varphi)+F(x_2,y_2,\varphi)\right|\le C_3\left|x_1-x_2\right|^\alpha\left|y_1-y_2\right|^\beta$;

5) $\exists C_4>0\ \forall\ x_1,x_2\in[-\pi,\pi],\ \forall\ \varphi_1,\varphi_2\in[-R,R]$

$\left|F(x_1,y,\varphi_1)-F(x_1,y,\varphi_2)-F(x_2,y,\varphi_1)+F(x_2,y,\varphi_2)\right|\le C_4\left|x_1-x_2\right|^\alpha\left|\varphi_1-\varphi_2\right|$;

6) $\exists C_5>0\quad \forall\, y_1,y_2\in[-\pi,\pi],\quad \forall\,\varphi_1,\varphi_2\in[-R,R]$

$\left|F(x,y_1,\varphi_1)-F(x,y_1,\varphi_2)-F(x,y_2,\varphi_1)+F(x,y_2,\varphi_2)\right|\le C_5\left|y_1-y_2\right|^\beta\left|\varphi_1-\varphi_2\right|$.

Тогда оператор суперпозиции $F:\varphi(x,y)\to F\left[x,y,\varphi(x,y)\right]$ действует из шара $B_{\alpha,\beta}^{1,1}(R)$ в шар $B_{\alpha,\beta}^{1,1}(R_1)$, где радиус R_1 однозначно определяется начальными данными.

<u>*Утверждение 3.*</u> Пусть функция $F(s,t,\varphi):T^2\times[-R,R]\to\Re$ удовлетворяет условиям 1) – 6) и $f\in K_{\alpha,\beta}^{1,1}(R')\quad (R'<R)$.

Тогда при

$$\lambda<\min\left\{\frac{1}{C^*\left\|S\right\|_{L_2\to L_2}},\frac{R-R'}{R_1\cdot\left\|S\right\|_{K_{\alpha,\beta}^{1,1}\to K_{\alpha,\beta}^{1,1}}}\right\},\tag{1.9}$$

где $C^*=\max\limits_{x,y,\varphi}\left|F_\varphi'(x,y,\varphi)\right|$, оператор

$$(T\varphi)(x,y)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F\left[s,t,\varphi(s,t)\right]ctg\frac{s-x}{2}ctg\frac{t-y}{2}dsdt+f(x,y)\tag{1.10}$$

является сжимающим в шаре $B_{\alpha,\beta}^{1,1}(R)$ в метрике пространства $L_2(T^2)$.

§ 2. Приближенное решение НСИУ (0.1)

Из оценки (1.9) следует, что если последовательность функций $\{f_n\}\subset K_{\alpha,\beta}^{1,1}(R)$ сходится в метрике пространства $L_2(T^2)$ к некоторой функции f_0, то она сходится к f_0 и в метрике пространства $C(T^2)$.

Верна следующая

Лемма 2.1. Если последовательность $\{f_n\}\subset K_{\alpha,\beta}^{1,1}(R)$ сходится в метрике пространства $C(T^2)$ к f_0, то $f_0\in K_{\alpha,\beta}^{1,1}(R)$.