

УДК 517.9:539.3

ПРОСТЕЙШИЕ ГАЛИЛЕЕВО-ИНВАРИАНТНЫЕ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ СОГЛАСОВАННЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

С. К. Годунов, В. М. Гордиенко

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090 Новосибирск

Дается введение в основанную на теории представлений группы $SO(3)$ формализацию галилеево-инвариантных и термодинамически согласованных уравнений математической физики, неизвестные в которых преобразуются при вращениях по неприводимым представлениям целых весов.

Введение. Выделение термодинамически согласованных уравнений и систем, применяемых в задачах механики и физики сплошных сред, начато в 60-е гг. XX в. [1, 2]. Первоначально они использовались для построения примеров решений. В дальнейшем число задач, изучаемых с помощью таких уравнений, увеличивалось, а системы уравнений становились сложнее (см. [3–14]). В связи с этим были предприняты попытки использовать для описания инвариантных относительно вращений термодинамически согласованных систем аппарат теории представлений групп [15, 16]. Однако эти попытки пока не привели к созданию прозрачной теории.

В настоящей работе, являющейся продолжением начатого в [12–16] группового анализа системы дифференциальных уравнений в частных производных, изучаются лишь простейшие термодинамически согласованные уравнения, но при этом детально исследуются их инвариантность относительно галилеевых преобразований координатных систем. Такие преобразования являются суперпозицией перехода в координатную систему, движущуюся с постоянной скоростью, и ортогонального преобразования пространственных координат. При этом неизвестные вектор-функции преобразуются с помощью ортогональных представлений группы вращений $SO(3)$ и пространственных отражений. В данной работе рассматриваются лишь вращения, поэтому не делается различий между векторами и псевдовекторами, которые по-разному реагируют на отражения.

Обычно используемые в механике тензорные переменные преобразуются при вращениях по представлениям довольно сложной структуры, и их можно разложить на простейшие из возможных неприводимые представления. Следует отметить, что для тензоров третьего и больших рангов такое разложение неоднозначно. Поэтому большое внимание уделяется символике, связанной с использованием неприводимых представлений.

В качестве примера приведем разложение произвольного ортогонального тензора второго ранга на неприводимые составляющие. Такой тензор состоит из девяти элементов, заполняющих матрицу 3×3 , и разлагается на три тензорных слагаемых: диагональную матрицу с одинаковыми диагональными элементами $a = (a_{11} + a_{22} + a_{33})/3$, кососимметрический тензор и симметрический тензор с нулевым следом.

Величина a является скаляром: при поворотах системы координат она не меняется. Три ненулевых элемента кососимметрического тензора преобразуются как трехмерный вектор. Матрицу из элементов пятимерного линейного пространства симметрических тензоров второго ранга с нулевым следом удобно записать в виде

$$a_{-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ a_0 \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

При вращениях вектор $(a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2)^T$, составленный из коэффициентов a_j , преобразуется по пятимерному неприводимому ортогональному представлению группы вращений.

Все изучаемые в данной работе законы сохранения приводятся к симметрическим, гиперболическим по Фридрихсу, уравнениям. В таких законах сохранения не учитываются диссипативные члены — вязкое трение и диффузия. Для их учета законы сохранения необходимо модифицировать. Здесь приводится лишь один пример такой модификации, в котором дается схема моделирования тепловой релаксации в многотемпературной среде.

Во всех доступных авторам настоящей работы изложениях теории представлений группы вращений [17–22] приводятся лишь комплексные матричные элементы унитарных представлений этой группы, в то время как приложения к задачам классической механики должны основываться на вещественных матрицах ортогональных представлений, матричные элементы которых приведены в п. 3. Для расчета этих элементов проведены элементарные, но достаточно громоздкие вычисления, по существу, повторяющие схему, используемую в теории унитарных представлений (см. [23]).

По мнению авторов, данное исследование представляет интерес как для математиков, так и для специалистов прикладных направлений, а предлагаемая в работе схема может быть обобщена на более сложные уравнения и уравнения релятивистской теории, в которой термодинамически согласованные законы сохранения также широко применяются.

1. Описание “простейшей” системы и ее предварительное изучение. Целью данной работы является описание некоторой формальной общей схемы, в которую укладывается много известных галилеево-инвариантных систем дифференциальных уравнений феноменологической математической физики, содержащих как законы сохранения массы, импульса, энергии, так и закон возрастания (или сохранения) энтропии. При записи каждой такой системы используется определяющий “термодинамический потенциал” L , возникающий в результате систематизации различных термодинамических потенциалов, появляющихся в конкретных физических задачах, а роль искомым функций играют переменные $q_0, u_1, u_2, u_3, q_1, q_2, \dots, T$, от которых этот потенциал зависит:

$$L = L(q_0, u_1, u_2, u_3, q_1, q_2, \dots, T).$$

Следует отметить, что в число таких “термодинамических” переменных в данной работе включены и компоненты u_1, u_2, u_3 вектора скорости $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$, с которой перемещаются точки сплошной среды. Переменная T — температура среды, плотность которой характеризуется величиной $L_{q_0} = L_{q_0}(q_0, u_1, u_2, u_3, q_1, q_2, \dots, T)$, сопряженной с переменной q_0 при помощи потенциала L .

Задавшись потенциалом L , можно выписать некоторую стандартную простейшую систему уравнений, свойства которой ниже детально исследуются. При этом указывается, какие уравнения системы описывают законы сохранения, при каком условии (на термодинамический потенциал) системы галилеево-инвариантны и обеспечивают корректность

(локальную) постановки задачи Коши. В конце пункта даны возможные обобщения, когда в уравнения включаются описываемые производными второго порядка силы вязкости, диффузии и т. п. Приступим к первоначальному анализу такой “простейшей” системы. Инвариантность уравнений, выбранных в качестве “простейших”, при переходе в систему координат, движущуюся относительно первоначальной с постоянной скоростью, входит в число вопросов, обсуждаемых в настоящем пункте, тогда как инвариантность относительно вращений рассматривается в п. 2.

В качестве “простейших” выберем системы уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t} + \frac{\partial(u_k L)_{q_0}}{\partial x_k} = 0; \quad (1.1a)$$

$$\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial(u_k L)_{u_i}}{\partial x_k} = 0; \quad (1.1б)$$

$$\frac{\partial L_{q_\gamma}}{\partial t} + \frac{\partial(u_k L)_{q_\gamma}}{\partial x_k} = -\varphi_\gamma; \quad (1.1в)$$

$$\frac{\partial L_T}{\partial t} + \frac{\partial(u_k L)_T}{\partial x_k} = \frac{q_\gamma \varphi_\gamma}{T}. \quad (1.1г)$$

(По повторяющимся индексам k, γ проводится суммирование.) Дивергентными уравнениями (1.1a), (1.1б) моделируются законы сохранения массы и импульса. Переменными q_γ описывается внутреннее состояние среды, например содержание в ней различных химических веществ, а правыми частями φ_γ моделируются скорости изменения параметров q_γ , например скорости реакций. Величина L_T является энтропией на единицу объема. Согласно закону возрастания энтропии необходимо, чтобы правые части φ_γ подчинялись неравенству $q_\gamma \varphi_\gamma \geq 0$ (предполагается, что $T > 0$).

Предполагая неизвестные функции q_0, u_k, q_γ, T достаточно гладкими по координатам и времени, из приведенных уравнений (1.1) как следствие можно получить еще одно, совместное с ними уравнение. Для этого равенство (1.1a) умножим на q_0 , равенства (1.1б) — на u_i , (1.1в) и (1.1г) — на q_γ, T соответственно и используем тождества

$$q_0 dL_{q_0} + u_i dL_{u_i} + q_\gamma dL_{q_\gamma} + T dL_T = dE, \quad (1.2)$$

$$q_0 d(u_k L_{q_0}) + u_i d(u_k L)_{u_i} + q_\gamma d(u_k L)_{q_\gamma} + T d(u_k L)_T = d[u_k(E + L)],$$

где $E = q_0 L_{q_0} + u_i L_{u_i} + q_\gamma L_{q_\gamma} + T L_T - L$ — преобразование Лежандра потенциала L .

Линейная комбинация уравнений (1.1) с выбранными коэффициентами с помощью тождеств (1.2) может быть преобразована в равенство дивергентного вида

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial[u_k(E + L)]}{\partial x_k} = 0. \quad (1.3)$$

В прикладных задачах это равенство описывает закон сохранения энергии. Отметим, что нулевая правая часть здесь получена за счет согласованного выбора правых частей $-\varphi_\gamma, q_\gamma \varphi_\gamma / T$ в уравнениях (1.1в), (1.1г).

Если термодинамический потенциал L является выпуклой функцией своих аргументов, то (1.1) будет симметрической, гиперболической по Фридрихсу, системой уравнений, что обеспечивает при гладких начальных данных корректную (локальную) разрешимость задачи Коши. Действительно, обозначая через r_i неизвестные $q_0, u_1, u_2, u_3, q_1, q_2, \dots, T$, а через $M^{(k)}$ — произведения $M^{(k)} = u_k L$, систему (1.1)

$$\frac{\partial L_{r_i}}{\partial t} + \frac{\partial M_{r_i}^{(k)}}{\partial x_k} = -\psi_i$$