

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
“ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ”
(ФГБОУ ВПО «ВГУ»)

Монотонные нелинейные операторы

Учебно-методическое пособие для вузов

Составители:

Ю.Б. Савченко

Воронеж

2014

1. Монотонные операторы

Л е м м а 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $E^1 = (-\infty, +\infty)$, со значениями в E^1 . Если

$$(x - y)[f(x) - f(y)] \geq 0, \quad (1.1)$$

$$xf(x) \rightarrow \infty \text{ при } |x| \rightarrow \infty, \quad (1.2)$$

то уравнение

$$f(x) = 0 \quad (1.3)$$

имеет решение. Если условие (1.1) выполнено в усиленном смысле :

$$[f(x) - f(y)](x - y) > 0 \text{ при } x \neq y. \quad (1.4)$$

То уравнение (1.3) имеет при $x > y$ единственное решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x > y$; тогда из (1.1) следует, что $f(x) \geq f(y)$. т.е. $f(x)$ не убывает на E^1 . Далее, из условий (1.2) и (1.1) вытекает, что существуют числа a и b такие, что $a < b, f(a) < 0, f(b) > 0$. Рассмотрим $f(x)$ на $[a, b]$. По теореме о промежуточных значениях непрерывной функции, существует $\xi \in (a, b)$, в которой $f(\xi) = 0$.

Если выполнено условие (1.4), то $f(x)$ строго возрастает на $(-\infty, +\infty)$ и тогда нуль функции ξ на $(-\infty, +\infty)$ единственен. Лемма 1 доказана.

Заметим, что требования непрерывности в лемме 1 существенно. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 5 & \text{при } x < -1 \\ x + 2 & \text{при } -1 \leq x \leq 1 \\ x^7 + 4 & \text{при } x > 1 \end{cases} \quad (1.5)$$

не являясь непрерывной на E^1 , удовлетворяет остальным условиям леммы 1, но для этой функции уравнение (1.3) не имеет решения.

Обобщая ситуацию, рассмотренную в лемме, дадим теперь следующие общие определения.

Пусть X – вещественное сепарабельное нормированное пространство, а X^* – пространство, сопряжённое к X . Рассмотрим нелинейный оператор A ,

Итак, доказано, что оператор $A(x)$ является сильно монотонным оператором в E^2 , с $c(t) = (\alpha - \beta)t$, если $\alpha > \beta$. Если $\alpha = \beta$, то $A(x)$ – монотонный оператор.

У п р а ж н е н и е 3. Докажите, что функция

$$A(x) = \begin{pmatrix} x_1^5 + 3x_1 - 2x_2 + 1, & 2x_2^7 + x_1 + 5x_2 - 4 \end{pmatrix},$$

где $x = (x_1, x_2) \in E^2$ является сильно монотонным оператором в E^2 .

Следующее определение обобщает условие (1.2) леммы 1.

О п р е д е л е н и е 1.4. Оператор $A: X \rightarrow X^*$ называется коэрцитивным, если для всех $x \in X$

$$\langle x, A(x) \rangle \geq \gamma(\|x\|)\|x\|, \quad (1.8)$$

где $\gamma(t)$ – функция, заданная при $t \geq 0$ и такая, что $\gamma(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.

В дальнейшем мы будем использовать функции $c(t)$ и $\gamma(t)$ из определений 1.3 и 1.4, не оговаривая их существование для сильно монотонного и коэрцитивного операторов соответственно. Впрочем, между этими функциями имеется связь, которая устанавливается в следующей лемме.

Л е м м а 2. Если оператор $A: X \rightarrow X^*$ сильно монотонный, то A коэрцитивный, причём можно принять

$$\gamma(t) = c(t) - \|A(0)\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия (1.7) при $y = 0$ имеем

$$\langle x, A(x) \rangle \geq c(\|x\|)\|x\| + \langle x, A(0) \rangle \geq c(\|x\|)\|x\| - \|x\|\|A(0)\|,$$

ибо $|\langle x, A(x) \rangle| \leq \|x\|\|A(0)\|$ и, значит, $\langle x, A(x) \rangle \geq -\|x\|\|A(0)\|$. полученное неравенство доказывает утверждение леммы 2.

З а м е ч а н и е. Если оператор коэрцитивен, то $\|A(x)\| \rightarrow \infty$ при $\|x\| \rightarrow \infty$.

Действительно, имеем оценку

$$||A(x)|| ||x|| \geq \langle x, A(x) \rangle \geq \gamma(||x||) ||x||,$$

т.е. $||A(x)|| \geq \gamma(||x||) \rightarrow \infty$, когда $||x|| \rightarrow \infty$.

В заключение пункта приведём элементарную лемму о функции $\epsilon(t)$, фигурирующей в определении сильной монотонности.

Л е м м а 3. Пусть дана непрерывная неотрицательная функция $\epsilon : [0; +\infty] \rightarrow E^1$ такая, что $\epsilon(0) = 0, \epsilon(t) > 0$ при $t > 0$ и $\epsilon(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Тогда из того, что $t_m \geq 0, m = 1, 2, \dots$, и $\epsilon(t_m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$, вытекает, что $t_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha_m = \epsilon(t_m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, а $\{t_m\}$ не сходится к нулю. Тогда найдутся число $\delta > 0$ и последовательность $\{t_{m'}\}$ последовательности $\{t_m\}$ такие, что $t_{m'} \geq \delta > 0$ для всех m' ; $\{t_{m'}\}$ ограничена. В противном случае нашлась бы её подпоследовательность $\{t_{m''}\}, t_{m''} \rightarrow +\infty$, а тогда и $\epsilon\{t_{m''}\} \rightarrow +\infty$, что невозможно, ибо $\alpha_{m''} \rightarrow 0$. Итак $\{t_{m'}\}$ ограничена. Тогда по теореме Больцано – Вейерштрасса найдётся её сходящаяся подпоследовательность $\{t_{m'''}\}, t_{m'''} \rightarrow t_0, m''' \rightarrow \infty$. По непрерывности $\epsilon(t_{m'''}) \rightarrow \epsilon(t_0) > 0, m''' \rightarrow \infty$, а это тоже невозможно. Полученное противоречие доказывает лемму.

2. Теоремы о существовании решений в конечномерном случае.

Докажем две теоремы о существовании решений уравнений с монотонными операторами в евклидовом пространстве E^n . Эти теоремы послужат базой для рассмотрения в последующих пунктах бесконечномерного случая.

Следующая теорема является непосредственным обобщением леммы 1 предыдущего пункта на случай сильно монотонного оператора E^n .

Т е о р е м а 2.1. Пусть $A : E^n \rightarrow E^n$ и непрерывен всюду в E^n . Если для всех $x, y \in E^n$

$$(x - y, A(x) - A(y)) \geq \epsilon ||x - y||^2, \quad (2.1)$$

где $\epsilon > 0$ - некоторая постоянная, то уравнение

$$A(x) = 0 \quad (2.2)$$

имеет единственное решение $x^* \in E^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведём доказательство теоремы индукцией по размерности n пространства E^n . При $n = 1$ доказываемое утверждение верно. Действительно, условие (2.1) обеспечивает выполнение условий (2.3) и (2.2) леммы 1 п. 1 (условие (1.1) этой леммы следует из леммы 2 п. 1). Итак, при $n = 1$ теорема 2.1 справедлива. Допустим теперь, что она справедлива в E^{k-1} , $k \geq 2$, и покажем, что тогда она будет верна и в E^k . Пусть $A: E^k \rightarrow E^k$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1 (при $n = k$). Рассмотрим в E^k стандартный базис $\{e^i\}_{i=1}^k$ (т.е. $e^i = (\delta_{ij})_{j=1}^k$ ($i = 1, \dots, k$), δ_{ij} - символ Кронекера). Тогда в базисе оператор задаётся набором своих координатных функции:

$$A(x) = \{f_i(x)\}_{i=1}^k, \quad \text{где } x = \sum_{j=1}^k x_j e_j.$$

Зафиксируем любое $t \in E^1$ и рассмотрим оператор $A_t: E^{k-1} \rightarrow E^{k-1}$, определяемый для всех $x = \sum_{i=1}^{k-1} x_i e_i$ следующей формулой:

$$A_t(x) = (f_i(x + t e_k))_{i=1}^{k-1}.$$

Очевидно, оператор A_t непрерывен на E^{k-1} и для любых $x, y \in E^{k-1}$, согласно условию (2.1), для него выполняется следующее неравенство:

$$\begin{aligned} (x - y, A_t(x) - A_t(y)) &= (t - t)[f_k(x + t e_k) - f_k(y + t e_k)] + \\ &+ \sum_{i=1}^{k-1} (x_i - y_i)[f_i(x + t e_k) - f_i(y + t e_k)] \geq c \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

Это означает, что оператор A_t также удовлетворяет условию (2.1). По индуктивному предположению система уравнений

$$f_i(x + t e_k) = 0, \quad i = 1, \dots, k-1, \quad (2.3)$$