УДК 533.9

ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ИОННО-ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ: ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

А. Е. Дубинов

Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,
607188 Саров
E-mail: dubinov@rol.ru

Получено точное решение задачи о структуре ионно-звуковой волны в плазме. При этом оба компонента плазмы рассматриваются как газы с заданными начальными температурами и показателями адиабаты. Система уравнений, описывающих профиль волны, решена с помощью оригинального метода, состоящего в сведении ее к уравнению Бернулли. Приведен численный пример полученного общего решения задачи о профиле волны при произвольных параметрах. Построены кривые, ограничивающие в пространстве параметров область существования стационарной уединенной ионно-звуковой волны.

Ключевые слова: плазма, ионно-звуковая волна, нелинейная теория.

Введение. Распространение ионно-звуковых волн, являющееся одним из основных волновых процессов в плазме, изучается на протяжении нескольких десятилетий. Нелинейная теория этих волн впервые рассмотрена в работах [1, 2], в которых методом механической аналогии (в иностранной литературе — методом псевдопотенциала) изучены их основные особенности. Установлено, что стационарные волны могут существовать в виде периодической или уединенной волны, причем скорость волны ограничена сверху значением, приблизительно в 1,58 раза превышающим скорость линейного ионного звука. В работе [3] найдено точное выражение для предельной скорости. При этом в [1–3] считалось, что ионный компонент плазмы холодный, а электронный — изотермичен и безынерционен.

В дальнейшем нелинейная теория была развита в многочисленных работах, в которых учитывались влияние ионной температуры, наличие двух и более сортов ионов, в том числе отрицательных, наличие двух групп электронов с различной температурой, инерция электронов и т. п. (подробнее об этом см. [4]).

В перечисленных и большинстве других работ считалось, что нагретые компоненты плазмы вовлекаются волной в изотермический процесс, т. е. их температура постоянна. Такое упрощение оставляет открытым вопрос о внешнем источнике или стоке тепловой энергии, поскольку изотермический процесс обязательно сопровождается поступлением энергии при сжатии потока плазмы и выделением энергии при его разрежении.

Таким образом, при описании нелинейных волн в плазме более реалистичными являются модели, в которых процесс считается адиабатическим. Такой подход позволяет учесть изменение температуры в различных фазах волны, а также влияние этого изменения на формирование и свойства самой волны.

В последнее время газодинамический подход используется для изучения ионно-звуковых и пылезвуковых волн [5–8]. В работах [5–8] проведен анализ нелинейных уравнений, описывающих структуру волн, в рамках адиабатического подхода, когда ионный или пылевой компонент плазмы представляет собой газ. При этом уравнение состояния газа принимается в виде адиабаты с произвольным показателем γ_+ в диапазоне $\gamma_+ \in [1; 3]$.

В результате анализа определены границы режимов и предельные скорости волны. Однако в [5–8] не было получено общее точное решение задачи о профиле волн (как известно, анализ свойств решения можно проводить, не решая сами уравнения), хотя в работе [5] приведено точное решение для частного случая холодных ионов с показателем адиабаты электронного компонента $\gamma_- = 2$.

В данной работе впервые приводится точное решение задачи о структуре ионно-звуковой волны в плазме в рамках газодинамического подхода для любых значений $\gamma_\pm$ в диапазоне $\gamma_\pm \in [1; 3]$.

1. Исходные уравнения и обозначения. Будем считать, что плазма является безграничной, бесстолкновительной, однородной и содержит только электроны и однозарядные ионы. Параметры электронного компонента невозмущенной плазмы обозначим следующим образом: m_- — масса частиц (в дальнейшем полагается, что электроны безынерционны, т. е. $m_- \to 0$), $e < 0$ — заряд частиц, T_{0-} — температура, γ_- — показатель адиабаты, P_- — давление; параметры ионного компонента: m_+ — масса частиц, $-e > 0$ — заряд частиц, T_{0+} — температура, γ_+ — показатель адиабаты, P_+ — давление, v_+ — скорость. В силу условия квазинейтральности концентрации частиц обоих знаков заряда в невозмущенной плазме $n_{0\pm} = n_0$. Возмущенные в волне параметры будем записывать без индекса 0.

Запишем одномерные уравнения, определяющие динамику ионного компонента плазмы:

— уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n_+}{\partial t} + \frac{\partial (n_+ v_+)}{\partial x} = 0; \tag{1}$$

— уравнение движения

$$m_+ \Big(\frac{\partial v_+}{\partial t} + v_+ \frac{\partial v_+}{\partial x}\Big) = e\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{n_+}\,\frac{\partial P_+}{\partial x}; \tag{2}$$

— уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 4\pi e(n_+ - n_-) \tag{3}$$

(φ — электростатический потенциал).

Систему уравнений (1)–(3) дополним уравнением состояния ионного газа, описывающим адиабатический процесс:

$$P_+ = kT_{0+} n_0 (n_+/n_0)^{\gamma_+} \tag{4}$$

(k — постоянная Больцмана). В уравнении Пуассона (3) необходимо учесть вклад электронного компонента, который аналогично (4) будем описывать в рамках предположения об адиабатичности процесса. Тогда, записав уравнение динамики электронного газа в виде (2), где масса электронов стремится к нулю вследствие их безынерционности, можно вывести уравнение, связывающее концентрацию электронов с электростатическим потенциалом. В результате получим (см. [9])

$$n_- = n_0 \Big(1 - \frac{\gamma_- - 1}{\gamma_-}\,\frac{e\varphi}{kT_{0-}}\Big)^{1/(\gamma_- - 1)}. \tag{5}$$

Легко убедиться, что при $\gamma_- \to 1$ уравнение (5) переходит в экспоненциальное распределение Больцмана.

Введем следующие обозначения: λ_D — дебаевская длина, ω_+ — ионная плазменная частота, v_s — линейная скорость ионного звука:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\gamma_- kT_{0-}}{4\pi n_0 e^2}}, \qquad \omega_+ = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m_+}}, \qquad v_s = \sqrt{\frac{\gamma_- kT_{0-}}{m_+}}.$$

Для уравнений (1)–(5) удобно также ввести следующие нормировки:

$$n_{\pm} = n_0 n'_{\pm}, \quad T_{\pm} = T_{0-} T'_{\pm}, \quad \varphi = (\gamma_- k T_{0-}/e)\varphi', \quad v_{\pm} = v_s v'_{\pm}, \quad x = \lambda_D x', \quad t = \omega_+^{-1} t'.$$

Следует отметить, что размерный потенциал φ и безразмерный потенциал φ' имеют разные знаки, так как $e < 0$. В дальнейшем штрихи у безразмерных величин опускаются.

Таким образом, систему уравнений (1)–(3) с использованием уравнений состояния (4), (5) можно записать в безразмерном виде

$$\begin{gathered}
\frac{\partial n_+}{\partial t} + \frac{\partial\,(n_+ v_+)}{\partial x} = 0, \\
\frac{\partial v_+}{\partial t} + v_+\,\frac{\partial v_+}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\tau}{\gamma_+ - 1}\,\frac{\partial}{\partial x}\,(n_+^{\gamma_+ - 1}), \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = n_+ - [1 - (\gamma_- - 1)\varphi]^{1/(\gamma_- - 1)},
\end{gathered} \tag{6}$$

где $\tau = \gamma_+ T_{0+}/(\gamma_- T_{0-})$.

2. Стационарное решение уравнений. Рассмотрим стационарную ионно-звуковую волну, распространяющуюся в направлении x с безразмерной скоростью M (M — число Маха). Для этого введем автомодельную переменную

$$\xi = x - \mathrm{M}t, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = -\mathrm{M}\,\frac{d}{d\xi}, \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi}.$$

Это означает переход из лабораторной системы отсчета в новую систему, движущуюся вместе с волной. В результате система уравнений в частных производных (6) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
-\mathrm{M}\frac{dn_+}{d\xi} + \frac{d\,(n_+ v_+)}{d\xi} = 0, \\
-\mathrm{M}\frac{dv_+}{d\xi} + v_+\,\frac{dv_+}{d\xi} = \frac{d\varphi}{d\xi} - \frac{\tau}{\gamma_+ - 1}\,\frac{d}{d\xi}\,(n_+^{\gamma_+ - 1});
\end{gathered} \tag{7}$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = n_+ - [1 - (\gamma_- - 1)\varphi]^{1/(\gamma_- - 1)}. \tag{8}$$

Прежде чем перейти к решению данной системы, рассмотрим известные методы решения подобных систем. Наиболее часто используется метод псевдопотенциала [1, 2], который заключается в интегрировании уравнений непрерывности и движения, получении из интегралов зависимостей концентрации и скорости ионов от потенциала и подстановке этих зависимостей в уравнение Пуассона. В результате получается автономное дифференциальное уравнение второго порядка для потенциала, которое имеет вид уравнения движения некоторого осциллятора в одномерном псевдопотенциале, причем электростатический потенциал используется в качестве псевдокоординаты, а координата — в качестве псевдовремени. Другой метод разработан в [10] и состоит в исключении из системы уравнений концентрации ионов и потенциала и сведении ее к уравнению второго порядка относительно скорости ионов. Решение и анализ этого уравнения также проводятся методом псевдопотенциала, однако в качестве псевдокоординаты используется скорость ионов. Существует также метод, описанный в работах [11, 12], в соответствии с которым из уравнений исключаются потенциал и концентрация ионов, при этом система сводится к уравнению третьего порядка относительно скорости. Полученное уравнение исследуют с помощью фазового портрета. Авторам данной работы не удалось использовать перечисленные методы для решения уравнений (7), (8).