МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. В. Флегель, Е. А. Сирота, А. Ф. Клинских

Пособие по решению задач по теории вероятностей и математической статистике

Часть 1. Теория вероятностей

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2015

Введение

Данное методическое пособие содержит базовые теоретические представления и методы решения типовых задач по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов факультета компьютерных наук Воронежского государственного университета. Целью курса является формирование представлений о вероятностных моделях реальных явлений и процессов, математическом аппарате, принципах разработки и компьютерной реализации вероятностных математических моделей. Основными задачами курса являются овладение фундаментальными понятиями и моделями теории вероятностей, получение представлений о подходах к постановке и решению конкретных задач математической статистики.

Цель пособия состоит в том, чтобы помочь студентам, изучающим данный курс, приобрести навыки и умения в применении методов и подходов теории вероятностей к решению различных задач, имеющих преимущественно прикладное содержание. В результате изучения курса студент должен знать основные понятия, базовые модели и математический формализм теории вероятностей, приёмы и методы аналитического решения типовых задач, а также указывать границы их применимости. Особое внимание при изучении курса должно быть обращено на умение выделить конкретные вероятностные схемы (модели) в прикладных задачах, проводить компьютерную реализацию основных вероятностных моделей и статистический анализ результатов моделирования, а также иметь представление о перспективных направлениях практического использования методов теории вероятностей и математической статистики.

В каждом разделе пособия приведены краткие теоретические сведения, даны решения типовых задач и примеров, а также предложен набор задач и упражнений для самостоятельного решения.

Индикатор события

Индикатором события A называют числовую функцию $I_A(\omega)$, заданную на пространстве элементарных событий Ω и определяемую формулой

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A \ \text{ или } \omega \in \overline{A}. \end{cases}$$

Индикаторы $I_A(\omega)$ и $I_B(\omega)$ событий A и B совпадают только при условии, что события A и B идентичны, т.е. множества A и B состоят из одних и тех же элементарных событий.

Выполняются следующие соотношения:

1) $I_{\overline{A}} = 1 - I_A$;

2) $I_{AB} = I_A I_B$;

3) $I_{A+B} = I_A(\omega) + I_B(\omega) - I_A(\omega) I_B(\omega)$;

4) $I_{A \setminus B} = I_{A\overline{B}} = I_A(1 - I_B)$;

5) $I_A - I_A = I_\emptyset = 0$;

6) $I_\Omega = 1$;

7) $I_A I_A = I_{AA} = I_A$.

Примеры с решениями

Пример 1. С использованием “индикаторного метода” проверить равенство $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

Решение.

$$I_{\overline{A+B}} = 1 - I_{A+B} = 1 - I_A - I_B + I_A I_B =$$
$$= 1 - I_A - I_B(1 - I_A) = (1 - I_A)(1 - I_B) = I_{\overline{A}} I_{\overline{B}} = I_{\overline{A} \cdot \overline{B}} \, .$$

Пример 2. Представить сумму двух событий $A+B$ как сумму несовместных событий.

Решение.

$$I_{A+B} = I_A + I_B - I_A I_B = \begin{cases} I_A + I_B I_{\overline{A}} \, , \\ I_A I_{\overline{B}} + I_B \, . \end{cases}$$

События $B\overline{A}$ и A несовместны, так как $A \cdot (B\overline{A}) = \emptyset$.

Таким образом,

$$A + B = \begin{cases} A + B\overline{A}\ , \\ A\overline{B} + B\ . \end{cases}$$

Пример 3. Найти событие X такое, что $A \cdot X = A \cdot A \cdot B$.

Решение.

$$\begin{gathered} I_{A \cdot X} = I_{A \cdot A \cdot B}, \\ I_A I_X = I_A I_A I_B, \\ I_A (I_X - I_A I_B) = 0, \\ I_X - I_A I_B = I_{\overline{A}C}, \end{gathered}$$

где C – любое. Отсюда

$$I_X = I_{A \cdot B} + I_{\overline{A}C} = I_{A \cdot B + \overline{A}C}\ .$$

События $A \cdot B$ и $\overline{A}C$ несовместны.

Таким образом, $X = A \cdot B + \overline{A}C$, где C любое.

Задачи

Задача 1. Представить сумму трех событий как сумму несовместных событий.

Задача 2. Найти событие X такое, что $\overline{X + A} + \overline{X + \overline{A}} = B$.

Задача 3. Пусть A, B и C – произвольные события. Найдите выражение для события, состоящего в том, что из событий A, B, C

1) произошло только событие A;
2) все три события произошли;
3) произошло, по крайней мере, одно из событий;
4) произошло только одно из событий;
5) произошло не более двух событий.

2. Классическое определение вероятности

Пусть результаты опыта обладают симметрией возможных исходов, тогда множество случаев представляет собой исчерпывающий набор его равновозможных и исключающих друг друга исходов. Про такой опыт говорят, что он сводится к схеме случаев. Случай называется благоприятным событию A, если появление этого случая влечет за собой появление этого события.

Классическое определение вероятности. Если опыт сводится к схеме случаев, то вероятность события A в данном опыте можно вычислить как долю благоприятных случаев в общем их числе:

$$P(A) = \frac{m_A}{n}, \tag{1}$$

где m_A – число случаев, благоприятных событию A; n – общее число случаев.

Примеры с решениями

Пример 1. (*Урна и шары.*) В урне находится 5 шаров, из которых 2 белых и 3 черных. Из урны наугад вынимается один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

Решение. Обозначим A интересующее нас событие: $A = \{$ появление белого шара$\}$.

Общее число случаев $n = 5$; из них два благоприятны событию A: $m_A = 2$. По формуле (1) $P(A) = 2/5$.

Пример 2. В урне 7 шаров: 4 белых и 3 черных. Из нее вынимаются без возвращения (одновременно или последовательно) два шара. Найти вероятность того, что они будут белыми.

Решение. Обозначим $B = \{$оба шара белые$\}$. При решении этой задачи будем пользоваться элементарными формулами комбинаторики, в частности формулой для числа сочетаний. Число сочетаний из k элементов по l – это число способов, которыми можно выбрать l различных элементов из k; обозначается оно C_k^l и вычисляется по формуле:

$$C_k^l \equiv \left(\begin{array}{c} k \\ l \end{array} \right) = \frac{k!}{l!(k-l)!}.$$

Таким образом, общее число случаев равно числу способов, какими можно выбрать 2 шара из 7:

$$n = C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21,$$

а число случаев, благоприятных событию B, есть это число способов, какими можно выбрать 2 белых шара из 4:

$$m_B = C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$

Отсюда

$$P(B) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}.$$

ŋqdqɐeɎ bɆ dədɆbɎзə d ɕɔɑbɔɐ Ɉqddɏqɐè