МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Учебное пособие для вузов

Составители:
М. А. Артемов,
Ю. М. Мяснянкин,
Т. Д. Семыкина

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2011

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие предназначено в помощь студентам специальностей «Прикладная математика» и «Механика» при изучении ими спецкурса «Вариационные принципы и методы в механике деформируемых твердых тел» и связанного с ним лабораторного практикума.

Хотя по данному вопросу существует обширная литература, рекомендовать студентам для изучения приемлемый учебник или доступную книгу не представляется возможным; особенно это относится к практическому применению вариационных методов.

В данном пособии не рассматриваются теоретические вопросы (существования, полноты, сходимости и т.д.); основное внимание обращено к сущности вариационных методов, решению конкретных задач.

В первой части пособия уделяется особое внимание физическому смыслу основных понятий МДТТ, построение моделей в изотермической, квазистатической постановке. Сформулированы основные вариационные принципы теории линейной упругости и основанные на них вариационные методы, позволяющие эффективно строить приближенные аналитические решения.

Рассмотрено решение задач строительной механики, даны примеры для самостоятельного решения и соответствующие методические указания.

Теоретическое обоснование вариационных методов можно найти в работах [1, 2, 3] и др.

1. Основные понятия и уравнения МДТТ

Опыт показывает, что твердое тело под влиянием внешних воздействий изменяет свою форму (деформируется). К внешним воздействиям относятся поверхностные нагрузки, массовые силы, нагревание или охлаждение тела. Если деформация тела не превышает некоторых пределов, то при достаточно медленном снятии внешних воздействий оно возвращается к своему первоначальному состоянию. Если снять внешние воздействия мгновенно, то тело совершает свободные колебания. Однако вследствие внешнего и внутреннего сопротивления тело по истечении некоторого времени возвращается в состояние равновесия, принимая свою первоначальную форму. Такое свойство твердого тела называется упругостью.

При значительных деформациях снятие внешних воздействий не приводит к полному исчезновению деформации. Сохраняется некоторая остаточная деформация тела. Эти остаточные деформации называются пластическими.

уравнениям неразрывности деформаций [4]

$$\varepsilon_{\nu i,j\mu} + \varepsilon_{\mu j,i\nu} - \varepsilon_{\mu i,j\nu} - \varepsilon_{\nu j,i\mu} = 0\,. \tag{1.1.3}$$

Среди уравнений (1.1.3) независимых только шесть, и (1.1.2) являются их общим интегралом; в свою очередь (1.1.2) обращает уравнения (1.1.3) в тождества. Поэтому при построении моделей МДТТ привлекают только одну из групп уравнений – или (1.1.2), или (1.1.3).

Заметим, что величина

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \tag{1.1.4}$$

совпадает при малых деформациях с относительным изменением объема частиц [4].

Тензор деформаций вводится в связи с двумя состояниями среды — начальным и конечным. Наряду с ним аналогично введем тензор скоростей деформаций, который описывает мгновенную деформацию тела. Компоненты симметричного тензора скоростей деформаций определяются по формулам

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(V_{i,j} + V_{j,i}\right), \tag{1.1.5}$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij} = d\varepsilon_{ij}/dt$, t – время, V_i – проекции вектора скорости точки на оси координат.

Уравнения совместности скоростей деформаций имеют вид:

$$\dot{\varepsilon}_{\nu i,j\mu} + \dot{\varepsilon}_{\mu j,i\nu} - \dot{\varepsilon}_{\mu i,j\nu} - \dot{\varepsilon}_{\nu j,i\mu} = 0. \tag{1.1.6}$$

Скорость относительного изменения объема равна

$$\dot{\theta} = \dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33} = V_{1,1} + V_{2,2} + V_{3,3}. \tag{1.1.7}$$

Механическое воздействие окружающей среды на материальное тело выражается через объемные и поверхностные силы. Пусть $d\vec{R}$ — элементарная сила (главный вектор системы сил), действующая на материальные частицы, заполняющие элементарную область, имеющую объем dV. По определению [4]

$$\vec{\Phi} = d\vec{R}/dV \tag{1.1.8}$$

есть интенсивность объемных сил; $\vec{\Phi}$ можно представить в виде

$$\vec{\Phi} = \rho \vec{F}, \tag{1.1.9}$$

где $\vec{F} = d\vec{R} / d\rho$ – интенсивность массовых сил, ρ – плотность.

Примерами массовых (объемных) сил являются: сила тяжести, магнитные и гравитационные силы, силы инерции и т.д.

Рассмотрим элементарную поверхность с площадью dS. Можно предположить, что dS – участок граничной поверхности тела или какой-либо другой воображаемой поверхности, разделяющей тело на две части. Обозначим через $\vec{n}$ вектор единичной, внешней по отношению к объему нормали к поверхности dS. Пусть на рассматриваемую площадку действует элементарная сила $d\vec{P}$. По определению $\vec{\sigma}_n = d\vec{P} / dS$ есть вектор напряжения, действующий на элементарную площадку dS с единичной нормалью $\vec{n}$. Вектор $\vec{\sigma}_n$ зависит от ориентации площадки dS, то есть от $\vec{n}$. Эта зависимость имеет вид [4]

$$\vec{\sigma}_n = \vec{n} \cdot {}^2\overline{\sigma}, \qquad \sigma_{nj} = n_i \sigma_{ij}, \tag{1.1.10}$$

где ${}^2\overline{\sigma}$ – тензор второго ранга с компонентами σ_{ij}. Этот тензор носит название тензора напряжений.

$$\sigma_{ji} n_j = \sigma_{1i} n_1 + \sigma_{2i} n_2 + \sigma_{3i} n_3.$$

В декартовой системе координат компоненты тензора напряжений имеют простой геометрический смысл. Выделим в любой точке тела три элементарные площадки, перпендикулярные к осям координат, тогда σ_{ij} – это проекция вектора напряжений, взятого на площадке с нормалью $\vec{n}_i$, на оси x_j. Если рассматривать соотношение (1.1.10) в точках граничной поверхности, то $\vec{\sigma}_n$ будут являться внешними поверхностными усилиями. В связи с этим уравнения (1.1.10) называют условиями на поверхности или граничными условиями в напряжениях.

Из уравнений количества движения и момента количества движения сплошной среды в классическом случае следует, что тензор напряжений симметричен

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \tag{1.1.11}$$

и выполняются уравнения движения в какой-либо точке объема тела [4]

$$\rho\, d^2 u_i / dt^2 = \sigma_{ji,j} + \rho F_i. \tag{1.1.12}$$

Уравнения (1.1.1)—(1.1.7) в механике сплошной среды называют кинематическими, а уравнения (1.1.8)—(1.1.12) – динамическими. Кинематические и динамические уравнения справедливы для сплошных тел и носят название универсальных уравнений.

Для широкого класса практически важных инженерных задач МДТТ (деформация стержней, пластинок, оболочек) вместо напряжений вводятся обобщенные усилия. Пусть $2h$ – толщина пластинки. Направим ось x_3 перпендикулярно срединной поверхности пластинки. Тогда обобщенные усилия вводятся по формулам

$$N_1 = \int_{-h}^{h} \sigma_{11} dz, \qquad N_2 = \int_{-h}^{h} \sigma_{22} dz, \qquad N_{12} = \int_{-h}^{h} \sigma_{12} dz\,,$$

$$Q_1 = \int_{-h}^{h} \sigma_{13} dz, \qquad Q_2 = \int_{-h}^{h} \sigma_{23} dz\,,$$

$$M_1 = \int_{-h}^{h} \sigma_{11} z dz, \qquad M_2 = \int_{-h}^{h} \sigma_{22} z dz, \qquad H = \int_{-h}^{h} \sigma_{12} z dz\,. \qquad (1.1.13)$$

Обобщенные усилия представляют собой усилия или моменты, отнесенные к единице длины элемента срединной поверхности в поперечном сечении оболочки. Уравнения равновесия (1.1.12) в каждом конкретном случае можно записать через обобщенные усилия.

1.2. Определяющие реологические уравнения

Универсальные уравнения выполняются при движении любых твердых тел. Однако различные реальные тела при одних и тех же внешних условиях ведут себя по-разному. Математически этот факт проявляется в том, что число универсальных уравнений меньше числа входящих в них неизвестных, система незамкнута. Дополнительные уравнения, которые замыкают систему, выделяют конкретную модель твердого тела, называют определяющими, или реологическими. Эти уравнения получают из экспериментальных наблюдений, физических и термомеханических соображений. Приведем некоторые из них для изотропных тел.

Линейно-упругие тела

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{\alpha\alpha} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}\,, \qquad (1.2.1)$$