

УДК 517.91

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ВИДА $y'' = f(x, y)$

Л. В. Овсянников

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Решена задача о классификации обыкновенных дифференциальных уравнений вида $y'' = f(x, y)$ по допускаемым локальным группам Ли преобразований. На основе понятия эквивалентности составлен список “эталонных” уравнений. Описаны классы уравнений, допускающих однопараметрическую группу, получаемых из “эталонных” путем инвариантного расширения.

Ключевые слова: эквивалентность, допускаемые операторы, инвариантное расширение.

Введение. Проблема групповой классификации дифференциальных уравнений впервые была поставлена основателем теории непрерывных групп норвежским математиком Софусом Ли [1]. Им было начато решение задачи о групповой классификации обыкновенного уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ и доказано, что это уравнение допускает не более чем 8-параметрическую группу преобразований пространства $\mathbb{R}^2(x, y)$, причем максимум достигается, если и только если это уравнение эквивалентно линейному уравнению $y'' = \varphi(x)y' + \psi(x)y + \omega(x)$. В данной работе проблема групповой классификации таких уравнений решается в более простом случае, когда правая часть не зависит от первой производной. Это условие оказывается очень жестким и приводит к сравнительно небольшому перечню возможных видов уравнений.

Решение проблемы групповой классификации связано с понятием эквивалентности уравнений такого вида относительно преобразований. Рассматриваются гладкие, локально взаимно-однозначные отображения (преобразования) $e: (x, y, f) \rightarrow (x_1, y_1, f_1)$ пространства $\mathbb{R}^3(x, y, f)$, действующие по формулам

$$x_1 = F(x, y), \quad y_1 = G(x, y), \quad f_1 = H(x, y, f) \quad (1)$$

и удовлетворяющие условию

$$\frac{\partial(x_1, y_1, f_1)}{\partial(x, y, f)} \equiv (F_x G_y - F_y G_x) H_f \neq 0. \quad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение e (1), (2) называется *преобразованием эквивалентности* (ПЭ) равенства $y'' = f$, если в результате его применения уравнение

$$y'' = f(x, y) \quad (3)$$

переходит в уравнение того же вида (здесь $y_1'' = d^2 y_1 / dx_1^2$)

$$y_1'' = f_1(x_1, y_1). \quad (4)$$

При этом уравнения (3) и (4), а также функции $f(x, y)$ и $f_1(x_1, y_1)$ называются *эквивалентными*.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00550).

Влияние понятия ПЭ на групповую классификацию определяется тем фактом, что *эквивалентные уравнения допускают подобные группы* [2], причем ПЭ является преобразованием подобия. А именно: если (3) допускает группу G , то (4) допускает ей подобную группу $G_1 = e(G)$. Ясно, что указанное соответствие является теоретико-множественным признаком эквивалентности, по которому множество уравнений вида (3) разбивается на классы эквивалентных уравнений. Поэтому задача групповой классификации сводится к двум следующим: (а) описать классы эквивалентных уравнений и (б) найти допускаемую группу для какого-нибудь (простейшего) представителя каждого класса.

Очевидно, что все возможные ПЭ образуют группу $E = \{e\}$ преобразований пространства $\mathbb{R}^3(x, y, f)$, которая называется *группой эквивалентностей* уравнений вида (3). Для решения задачи (а) необходимо прежде всего описать эту группу.

1. Группа эквивалентностей. Вычисление выражения для производной $y_1'' = d^2 y_1 / dx_1^2$ в переменных (x, y) , получаемого подстановкой (1), дает соотношение

$$(F_x + y'F_y)^3 y_1'' = (F_x + y'F_y)(G_{xx} + 2y'G_{xy} + y'^2 G_{yy} + y''G_y) - \\ - (G_x + y'G_y)(F_{xx} + 2y'F_{xy} + y'^2 F_{yy} + y''F_y).$$

Преобразование уравнения (3) в (4) подстановкой (1) возможно, если и только если в этом соотношении не будет слагаемых с первой производной y' . Поэтому оно расщепляется по степеням y' и приводит к равенствам

$$F_x^3 f_1 = Jf + F_x G_{xx} - G_x F_{xx}; \quad (1.1)$$

$$3F_x^2 F_y f_1 = F_y G_{xx} - G_y F_{xx} + 2F_x G_{xy} - 2G_x F_{xy}; \quad (1.2)$$

$$3F_x F_y^2 f_1 = F_x G_{yy} - G_x F_{yy} + 2F_y G_{xy} - 2G_y F_{xy}; \quad (1.3)$$

$$F_y^3 f_1 = F_y G_{yy} - G_y F_{yy}, \quad (1.4)$$

где $J = F_x G_y - F_y G_x \neq 0$.

В силу (2) из (1.4) следует $F_y = 0$ и, значит, $F = \alpha(x)$, а равенства (1.2), (1.3) упрощаются:

$$G_y F_{xx} = 2F_x G_{xy}, \quad G_{yy} = 0. \quad (1.5)$$

При этом (1.1) принимает вид

$$F_x^3 f_1 = F_x G_y f + F_x G_{xx} - G_x F_{xx}. \quad (1.6)$$

Общее решение системы (1.5) есть $G = \beta(x)y + \gamma(x)$, причем $\alpha''\beta = 2\alpha'\beta'$, $\alpha'\beta \neq 0$, где последнее неравенство следует из условия $J \neq 0$. Подстановка в (1.6) полученных выражений для F и G дает соотношение

$$\alpha'^3 f_1 = \alpha'\beta f + (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')y + (\alpha'\gamma'' - \alpha''\gamma'),$$

которое после замены $y = (y_1 - \gamma)/\beta$ упрощается до следующего:

$$\frac{\alpha'^2}{\beta} f_1 = f - \left(\frac{1}{\beta}\right)'' y_1 + \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)'.$$

Итак, получается общее ПЭ

$$x_1 = \alpha(x), \quad y_1 = \beta(x)y + \gamma(x), \quad \alpha''\beta = 2\alpha'\beta' \quad (\alpha'\beta \neq 0), \\ (\alpha'^2/\beta)f_1 = f - (1/\beta)'' y_1 + (\gamma/\beta)', \quad (1.7)$$

зависящее от двух произвольных функций $\beta(x), \gamma(x)$ и двух произвольных констант, возникающих при вычислении функции $\alpha(x)$.

Для дальнейшего полезно отметить некоторые частные виды ПЭ.

Лемма 1. Пусть $f_0(x, y)$ есть некоторая фиксированная функция. Тогда

(i) функция $f(x, y) = Af_0(Bx + C, My + N)$ с постоянными A, B, C, M, N при $B \neq 0$ эквивалентна функции $f_1(x_1, y_1) = (AM/B^2)f_0(x_1, y_1)$, а при $B = 0$, когда $f_0 = f_0(y)$, — функции $f_1(y_1) = AMf_0(y_1)$;

(ii) функция $f(x, y) = f_0(x, y) + p(x)y + q(x)$ эквивалентна функции $f_1(x_1, y_1) = A(x_1)f_0(x_1, y_1)$, где $A(x_1) = (\beta/\alpha'^2)(x_1)$, функции α и β находятся из уравнений $\beta(1/\beta)'' = p(x)$, $\beta\alpha'' = 2\beta'\alpha'$, а зависимость x от x_1 получается обращением функции $x_1 = \alpha(x)$;

(iii) функция $f_0(x, y)$ эквивалентна функции $f_1(x_1, y_1) = x_1^{-3}f_0(1/x_1, y_1/x_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все утверждения следуют из ПЭ (1.7). В случае (i) при $B \neq 0$ используется ПЭ $x_1 = Bx + C$, $y_1 = My + N$, а при $B = 0$ — ПЭ $x = x_1$, $y_1 = My + N$. В случае (ii) правая часть в выражении (1.7) для f_1 в силу равенства $y_1 = \beta y + \gamma$ приводится к виду

$$f - [(1/\beta)'' - p/\beta]y_1 + [(\gamma/\beta)'' - p\gamma/\beta + q]$$

и выбор β и γ в качестве решений уравнений

$$(1/\beta)'' = p/\beta, \quad (\gamma/\beta)'' = p\gamma/\beta - q$$

приводит соотношение (1.7) к нужной форме $(\alpha'^2/\beta)f_1 = f_0$. Случай (iii) получается из (1.7) с функциями $\alpha = 1/x$, $\beta = 1/x$, $\gamma = 0$.

В частности, если взять $f_0 \equiv 0$, то в случае (ii) функция f будет линейна по y и она эквивалентна функции $f_1 = 0$.

2. Допускаемые операторы. Операторы однопараметрических подгрупп, допускаемых уравнением (3), ищутся в виде

$$X = \xi(x, y) \partial_x + \eta(x, y) \partial_y. \quad (2.1)$$

Стандартный алгоритм вычисления таких операторов (см. [2]) приводит к следующим определяющим уравнениям (ОУ):

$$\xi_{yy} = 0, \quad \eta_{yy} = 2\xi_{xy}, \quad 3f\xi_y = 2\eta_{xy} - \xi_{xx}; \quad (2.2)$$

$$\eta_{xx} + (\eta_y - 2\xi_x)f = \xi f_x + \eta f_y, \quad (2.3)$$

где функция $f = f(x, y)$ есть правая часть в (3).

Если функция f линейна по y , т. е. (3) — линейное уравнение, то она эквивалентна функции $f \equiv 0$. В этом случае система (2.2), (2.3) имеет общее решение вида

$$\xi = a(x)y + b(x), \quad \eta = a'(x)y^2 + c(x)y + d(x),$$

где $a'' = c'' = d'' = 0$, $b'' = 2c'$. Это и дает известную 8-мерную допускаемую алгебру Ли операторов.

Далее предполагается, что $f_{yy} \neq 0$. Тогда из третьего уравнения (2.2) следуют равенства $\xi_y = 0$ и $2\eta_{xy} = \xi_{xx}$. В этом случае подсистема (2.2) легко интегрируется и ее общее решение есть $\xi = a(x)$, $\eta = b(x)y + c(x)$, причем $2b' = a''$.

Итак, допускаемые операторы (2.1) имеют вид

$$X = a(x) \partial_x + [b(x)y + c(x)] \partial_y, \quad a'' = 2b' \quad (2.4)$$

и остается ОУ (2.3), а именно

$$b''y + c'' + (b - 2a')f = af_x + (by + c)f_y, \quad (2.5)$$

которое служит для классификации нелинейных уравнений (3).