Вестник Московского университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в ноябре 1946 г.

Серия 1 **МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА**

№ 5 · 2015 · сентябрь – октябрь

Издательство Московского университета

Выходит один раз в два месяца

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Мазур А. Е., Питербарг В. И. Гауссовские копульные временные ряды с тяжелыми хвостами и сильной временной зависимостью 3

Каменов А. А. Оптимальная остановка для абсолютного максимума однородной диффузии 7

Попков К. А. О единичных тестах для контактов 13

Механика

Шарафутдинов Г. З. Кручение круглого цилиндра при конечных деформациях 19

Маркеева А. А., Левин М. А. Предельные уравнения движения механических систем с вибрирующими элементами 23

Краткие сообщения

Банару М. Б. W_4-многообразия и аксиома косимплектических гиперповерхностей 34

Чмутин Г. Н. Равномерная состоятельность знаковой оценки параметра AR(1)-модели для наблюдений с выбросами 37

Кантонистова Е. О. Лиувиллева классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения 41

Савченко Р. А. О неэффективности иерархической системы пересадок 44

Комбаров Ю. А. Верхняя оценка сложности реализации линейных функций схемами в одном базисе из многовходовых элементов 47

Чубариков В. Н. Об одной теореме о среднем в теории чисел 51

Зайцев М. В. Градуированные тождества конечномерных алгебр коразмерностей тождеств ассоциативных алгебр 54

Арушанян О. Б., Волченскова Н. И., Залёткин С. Ф. О применении рядов Чебышёва к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений с быстрорастущими решениями 57

Карликов В. П., Толоконников С. Л. О периоде автоколебаний куполов конических струйных аэраторов с разными углами конусности 60

Ковалёв В. Л., Косьянчук В. В., Якунчиков А. Н. О разделении газовых смесей при свободномолекулярном течении через колеблющуюся мембрану 64

Александров В. В., Александрова Т. Б., Ангелес Вазкез А., Вега Р., Рейес Ромеро М., Сото Э., Тихонова К. В., Шуленина Н. Э. Алгоритм коррекции выходных сигналов вестибулярных механорецепторов для имитации пассивного поворота 67

CONTENTS

Mathematics

Mazur A. E. and Piterbarg V. I. Gaussian copula time series with heavy tails and strong time dependence 3
Kamenov A. A. Optimal stopping for absolute maximum of homogeneous diffusion 7
Popkov K. A. Single tests for contacts 13

Mechanics

Sharafutdinov G. Z. Torsion of a circular cylinder at finite strains 19
Markeeva A. A. and Levin M. A. Limit equations of motion for mechanical systems with vibrating elements 23

Short notes

Banaru M. B. W_4-manifolds and the cosymplectic hypersurfaces axiom 34
Chmutin G. N. Uniform consistency of sign estimate of the parameter of $AR(1)$-model for observations with outliers 37
Kantonistova E. O. Liouville classification of integrable Hamiltonian systems on surfaces of revolution 41
Savchenko R. A. Inefficiency of a hierarchical hub system 44
Kombarov Yu. A. Upper estimate for complexity of realization of linear functions by curcuits in some basis consisting of many-input elements 47
Chubarikov V. N. On a mean value theorem in the number theory 51
Zaitsev M. V. Graded identities of finite-dimensional algebras of codimensions of identities of associated algebras 54
Arushanyan O. B., Volchenskova N. I., and Zaletkin S. F. Implementation of Chebyshev series for integration of ordinary differential equations with highly growing solutions 57
Karlikov V. P. and Tolokonnikov S. L. Self-oscillation period of conical jet aerators with various apex angles 60
Kovalev V. L., Kos'yanchuk V. V., and Yakunchikov A. N. Separation of gas mixtures in free molecular flow through a vibrating membrane 64
Aleksandrov V. V., Aleksandrova T. B., Angelez Vazgez A., Vega P., Rayes Romero M., Soto E., Tikhonova K. V., and Shulenina N. E. An output signal correction algorithm for vestibular mechanoreceptors to simulate passive turns 67

To buy separate issues of “Moscow University Mathematics Bulletin” and “Moscow University Mechanics Bulletin” or subscribe to them one should refer to

Allerton Press Inc.
250 West 57th Street,
New York, USA, NY 10107.
Fax: 646-424-96-95

Математика

УДК 519.21

ГАУССОВСКИЕ КОПУЛЬНЫЕ ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ С ТЯЖЕЛЫМИ ХВОСТАМИ И СИЛЬНОЙ ВРЕМЕННОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ

А. Е. Мазур[1], **В. И. Питербарг**[2]

В работе описан класс функций f, для которых случайная величина $X = f(\xi)$, где ξ — стандартная нормальная случайная величина, принадлежит области максимального притяжения Фреше. Для фунций из этого класса доказана предельная теорема для максимума последовательности $X(k) = f(\xi_k)$, где ξ_k — гауссовская стационарная последовательность с медленным убыванием корреляции.

Ключевые слова: копула, гауссовская последовательность, область максимального притяжения Фреше, предельные теоремы для максимума.

A class of functions f is described for which the random variable $X = f(\xi)$, where ξ is a standard normal random variable, belongs to Fréchet maximum domain of attraction. For any f from this class, a limit theorem for the maximum of the sequence $X(k) = f(\xi_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, is proved, where ξ_k is a Gaussian stationary sequence with a slowly decreasing correlation.

Key words: copula, Gaussian sequence, Fréchet maximum domain of attraction, limit theorems for maximum.

1. Введение. Модели временных рядов с тяжелыми хвостами одномерных распределений и сильной временной зависимостью (большим радиусом корреляции) часто используются при исследовании финансовых и экономических данных, в задачах передачи информации [1–4]. Обычно в качестве моделей применяются устойчивые распределения, различные типы преобразований дробного броуновского движения [2, 4, 5]. В то же время имеются и другие хорошо изученные модели случайных временных рядов с сильной временной зависимостью. В первую очередь это гауссовские последовательности. Однако гауссовское распределение имеет легкий суперэкспоненциальный хвост, что является существенным недостатком при построении моделей для вышеупомянутых данных. Чтобы использовать в этой ситуации все возможности хорошо развитой техники исследования гауссовских распределений, можно прибегнуть к нелинейным преобразованиям фазового пространства, т.е. к *копулам.* Например, в [6] гауссовские копулы применяются в задачах хеджирования и прогноза доходности при наличии большого числа факторов и малого числа наблюдений. Зависимость гауссовских распределений от малого числа параметров и возможность моделирования сильной зависимости играют здесь существенную роль.

Под гауссовским копульным временным рядом мы понимаем случайную последовательность $X(k) = f(\xi_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, где ξ_k — гауссовская стационарная последовательность с нулевым средним, единичной дисперсией и ковариационной функцией $r(k)$. Выбирая соответствующим образом копульную функцию $f(x)$, можно получать различные типы хвостов маргинальных распределений временного ряда $X(k)$. Появляется возможность подгонки модели к данным, имеющим предположительно тяжелые (степенные) хвосты распределений. В настоящей работе мы рассматриваем гауссовские копульные временные ряды, распределение которых принадлежит области максимального притяжения Фреше FMDA(α), $\alpha > 0$. Мы исходим из предельной теоремы Бермана для максимума гауссовской последовательности [7]. Предположим, что

$$r(n) \ln n \to 0, \ \ n \to \infty. \tag{1}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} P(\max_{k=1,\ldots,n} \xi_k < a_n^{-1} x + a_n) = e^{-e^{-x}},$$

где

$$a_n = \sqrt{2 \ln n} - \frac{\ln \ln n + \ln 4\pi}{2\sqrt{2 \ln n}}. \tag{2}$$

2. Условия принадлежности $f(\xi)$ к FMDA(α). Предположим, что функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, неограниченно возрастает при $x \to \infty$ и для некоторого x_0 и всех $x \geqslant x_0$ она дважды непрерывно

[1] *Мазур Анна Евгеньевна* — асп. каф. теории вероятностей мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: amfolity@gmail.com.

[2] *Питербарг Владимир Ильич* — доктор физ.-мат. наук, гл. науч. сотр., зав. лаб. теории вероятностей мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: piter@mech.math.msu.su.

дифференцируема, причем $f'(x) > 0$. Тогда из (1), (2) следует, что для любой последовательности положительных чисел d_n

$$\lim_{n\to\infty} P(d_n^{-1} \max_{k=1,\dots,n} f(\xi_k) < d_n^{-1} f(a_n^{-1}x + a_n)) = e^{-e^{-x}}. \tag{3}$$

Мы хотим, чтобы функция распределения $F(x)$ случайной величины $X_k = f(\xi_k)$ принадлежала $\mathrm{FMDA}(\alpha)$, т.е. имело место соотношение из [1]

$$1 - F(x) = x^{-\alpha} L(x),$$

где $L(x)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция. Если это выполнено, то в случае независимых X_k, $k = 1, 2, \dots$, для любой последовательности d_n, такой, что

$$1 - F(d_n) \sim \frac{1}{n}, \quad n \to \infty, \tag{4}$$

имеет место сходимость

$$\lim_{n\to\infty} P(d_n^{-1} \max_{k=1,\dots,n} X_k < y) = e^{-y^{-a}} \tag{5}$$

для всех $y > 0$. Полагая в (3) $x = \alpha \ln y$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} P(d_n^{-1} \max_{k=1,\dots,n} f(\xi_k) < d_n^{-1} f(\alpha a_n^{-1} \ln y + a_n)) = e^{-y^{-a}}, \; y > 0.$$

Сопоставляя это с (5), заключаем, что

$$\frac{f(\alpha a_n^{-1} \ln y + a_n)}{d_n} \to y \tag{6}$$

при $n \to \infty$ для всех положительных y. Полагая в (6) $y = 1$, видим, что можно взять $d_n = f(a_n)$. То есть, чтобы $f(\xi_k)$ принадлежала к $\mathrm{FMDA}(\alpha)$ (напомним, что f строго монотонна для всех больших x), необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{f(\alpha a_n^{-1} \ln y + a_n)}{f(a_n)} \to y \tag{7}$$

при $n \to \infty$ и для всех положительных y, или после логарифмирования

$$\ln f(\alpha a_n^{-1} \ln y + a_n) - \ln f(a_n) \to \ln y.$$

Обозначая $h(x) = \ln f(x)$, перепишем последнее соотношение как

$$h(a_n + \alpha a_n^{-1} \ln y) - h(a_n) = \ln y + o(1).$$

По формуле Тейлора

$$\frac{\alpha \ln y}{a_n} h'(a_n) + \frac{\alpha^2 \ln^2 y}{2a_n^2} h''\left(a_n + \frac{\alpha \theta_n \ln y}{an}\right) = \ln y + o(1)$$

при $n \to \infty$, где $\theta_n = \theta_n(y) \in [0, 1]$. Устремляя $y \to 1$, окончательно получаем, что

$$\frac{\alpha}{a_n} h'(a_n) + \frac{\alpha^2 \ln y}{2a_n^2} h''\left(a_n + \frac{\alpha \theta_n \ln y}{a_n}\right) = 1 + o(1) \quad \text{при} \quad n \to \infty \text{ для всех } y > 0.$$

В случае $y = 1$ вышеприведенные соотношения имеют место тогда и только тогда, когда

$$\frac{\alpha}{a_n} h'(a_n) = 1 + o(1), \quad \frac{1}{a_n^2} h''\left(a_n + \frac{\alpha \theta_n \ln y}{a_n}\right) = o(1) \quad \text{при } n \to \infty. \tag{8}$$

Заметим, что $a_{n+1}/a_n \to 1$ и $\left(a_n + \frac{\alpha \theta_n \ln y}{a_n}\right)/a_n \to 1$ при $n \to \infty$. Тогда (8) выполняется, если

$$h'(z) = \frac{z}{\alpha} + z g(z), \quad \frac{1}{z^2} h''(z) = o(1) \quad \text{при } z \to \infty, \tag{9}$$