

Вестник Московского университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в ноябре 1946 г.

Серия 15

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
И КИБЕРНЕТИКА

№ 4 • 2015 • ОКТЯБРЬ–ДЕКАБРЬ

Издательство Московского университета

Выходит один раз в три месяца

СОДЕРЖАНИЕ

Абдикалыков А.К., Икрамов Х.Д., Чугунов В.Н. Унитарные автоморфизмы пространства $(T+N)$ -матриц порядка 4	3
Бодров А.Г., Никитин А.А. Исследование уравнения равновесной плотности биологического вида в пространствах различных размерностей	7
Лукьяница А.А., Зайцев Ф.С. Построение скрытых моделей Маркова для обработки магнитной диагностики плазмы	13
Новикова А.О. Об одной задаче быстрогодействия с нелинейностью гравитационного типа	17
Морозова Н.С. Управление движением строя для мультиагентной системы, моделирующей автономных роботов	23
Вдовин П.М., Костенко В.А. Исследование эффективности процедуры агрегации виртуальных каналов при построении бортовых коммутируемых сетей	32
Куликов В.В. О некоторых способах определения словосочетаний для задачи классификации текстов	40
Указатель статей, опубликованных в журнале “Вестник Московского университета. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика” в 2015 году	49

CONTENTS

Abdikalykov A.K., Ikramov Kh.D., Chugunov V.N. Unitary automorphisms of the subspace of (T+H)-matrices of order 4	3
Bodrow A.G., Nikitin A.A. Studying the species equilibrium density equation in spaces of different dimensions	7
Lukianitsa A.A., Zaitsev F.S. Construction of hidden Markov models for plasma magnetic diagnostics	13
Novikova A.O. Optimal control problem with nonlinearity of gravitational type	17
Morozova N.S. Formation control for multi-agent system, which models a group of autonomous robots	23
Vdovin P.M., Kostenko V.A. An analysis of virtual links aggregation procedure effectiveness during onboard switched networks design	32
Kulikov V.V. Some methods of words combination definition in text classification problem	40
<i>Index of papers</i> , published in 2015	49

УДК 512

А. К. Абдикалыков¹, Х. Д. Икрамов², В. Н. Чугунов³**УНИТАРНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ ПРОСТРАНСТВА (Т+Н)-МАТРИЦ ПОРЯДКА 4***

В статье рассматриваются матрицы U из унитарной группы U_4 , для которых справедлива импликация $\forall A \in \mathcal{TH}_4 \rightarrow B = U^*AU \in \mathcal{TH}_4$, где \mathcal{TH}_4 — множество (Т+Н)-матриц порядка 4. Такие матрицы можно отождествить с унитарными автоморфизмами пространства \mathcal{TH}_4 .

Решается вопрос: может ли граница матрицы U не содержать ни одного нуля? (Граница матрицы — это совокупность элементов этой матрицы, стоящих в ее первой и последней строке и первом и последнем столбце.) Показано, что матрицы U с полностью ненулевой границей действительно существуют, что контрастирует с ситуацией для унитарных автоморфизмов пространств теплицевых и ганкелевых матриц порядка 4.

Ключевые слова: теплицева матрица, ганкелева матрица, (Т+Н)-матрица, характеристический многочлен, унитарное подобие.

1. Введение. Пусть $M_n(\mathbb{C})$ — линейное пространство комплексных $n \times n$ -матриц. Обозначим символами \mathcal{T}_n , \mathcal{H}_n и \mathcal{TH}_n подпространства этого пространства, образованные соответственно теплицевыми, ганкелевыми и (Т+Н)-матрицами. Эти последние называются в англоязычной литературе Toeplitz-plus-Hankel matrices и действительно определяются как матрицы, представимые в виде суммы теплицева и ганкелева слагаемого.

Нас интересуют следующие вопросы.

1. Каковы унитарные $n \times n$ -матрицы, которые отображают подпространство \mathcal{T}_n в себя, выступая в качестве трансформирующих матриц подобия? Если матрица U обладает этим свойством, то мы пишем $U \in \text{UAut}(\mathcal{T}_n)$. Таким образом, включение $U \in \text{UAut}(\mathcal{T}_n)$ означает импликацию

$$\forall A \in \mathcal{T}_n \rightarrow B = U^*AU \in \mathcal{T}_n.$$

2. Тот же вопрос 1 по отношению к подпространству \mathcal{H}_n вместо \mathcal{T}_n . Соответствующее множество унитарных матриц будем обозначать через $\text{UAut}(\mathcal{H}_n)$.

3. Тот же вопрос 1 с заменой \mathcal{T}_n на \mathcal{TH}_n и множества $\text{UAut}(\mathcal{T}_n)$ на $\text{UAut}(\mathcal{TH}_n)$.

Ответы на вопросы 1 и 2 были даны соответственно в [1] и [2]. Они содержатся в формулируемых ниже теоремах 1 и 2. Для этих формулировок нам придется ввести некоторые обозначения.

Символом U_n мы обозначаем унитарную группу порядка n , т. е. группу всех унитарных $n \times n$ -матриц. Символы $\mathcal{D}_n^\varepsilon$ и \mathcal{P}_n используются соответственно для диагональной матрицы $\text{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1})$ и так называемой перьединичной матрицы

$$\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \dots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

В частном случае, когда $\varepsilon = -1$, мы пишем \mathcal{D}_n вместо $\mathcal{D}_n^\varepsilon$. Таким образом,

$$\mathcal{D}_n = \text{diag}(1, -1, 1, -1, \dots).$$

Теорема 1. *Группа $\text{UAut}(\mathcal{T}_n)$ есть прямое произведение группы U_1 и группы, порожденной перьединичной матрицей \mathcal{P}_n и матрицами $\mathcal{D}_n^\varepsilon$, соответствующими всем числам ε с модулем 1.*

¹ Факультет ВМК МГУ, заочн. асп., e-mail: adiko2008@gmail.com

² Факультет ВМК МГУ, проф., д.ф.-м.н., e-mail: ikramov@cs.msu.su

³ ИВМ РАН, ведущ. науч. сотр., д.ф.-м.н., e-mail: chugunov.vadim@gmail.com

* Работа третьего автора поддержана грантом Российского научного фонда № 14-11-00806.

Теорема 2. Если $n \geq 3$, то $\text{UAut}(\mathcal{H}_n)$ есть прямое произведение группы \mathbf{U}_1 и дискретной группы, порожденной матрицами \mathcal{P}_n и \mathcal{D}_n .

Назовем *границей* матрицы A совокупность элементов этой матрицы, стоящих в ее первой и последней строке и первом и последнем столбце. Как видно из теорем 1 и 2, граница каждой из матриц в группах $\text{UAut}(\mathcal{T}_n)$ и $\text{UAut}(\mathcal{H}_n)$ содержит только два ненулевых элемента. Случай $n = 2$ в теореме 2 является примечательным исключением. Оно связано с тем обстоятельством, что всякая симметричная 2×2 -матрица A есть в то же время ганкелева матрица. Поэтому группа $\text{UAut}(\mathcal{H}_2)$ должна включать в себя все вещественные ортогональные матрицы 2-го порядка.

Задача о характеристизации матриц $U \in \text{UAut}(\mathcal{TH}_n)$ имеет смысл только начиная с $n = 3$. Дело в том, что любая 2×2 -матрица A может рассматриваться как (Т+Н)-матрица, что демонстрирует, например, представление

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}.$$

Группа унитарных автоморфизмов $\text{UAut}(\mathcal{TH}_3)$ описана в нашей статье [3]. Это описание содержится в следующем утверждении.

Теорема 3. Если $n = 3$, то $\text{UAut}(\mathcal{TH}_n)$ есть прямое произведение группы \mathbf{U}_1 и группы, порожденной матрицами \mathcal{D}_3 и \mathcal{P}_3 , а также всеми матрицами вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta \\ \gamma & \varepsilon & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha = \frac{1}{2}(e^{i\xi} \mp \varepsilon)$, $\beta = -\frac{1}{2}(e^{i\xi} \pm \varepsilon)$, $\gamma = \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{2}}$, $\varepsilon \in [0, 1]$ и $\xi \in (-\pi, \pi]$.

Таким образом, большинство матриц из группы $\text{UAut}(\mathcal{TH}_3)$ имеет полностью ненулевую границу α , β , γ . Возникает вопрос: не является ли порядок $n = 3$ для автоморфизмов (Т+Н)-матриц таким же исключением, каким был случай $n = 2$ для автоморфизмов ганкелевых матриц?

Здесь уместно отметить, что задача описания матриц $U \in \text{UAut}(\mathcal{TH}_n)$ для произвольного n гораздо более трудна, чем аналогичные задачи для $\text{UAut}(\mathcal{T}_n)$ и $\text{UAut}(\mathcal{H}_n)$. Полностью эта задача не решена до сих пор. Что же касается вопроса, поставленного в предыдущем абзаце, то ответ на него дается в настоящем сообщении. Мы показываем, что матрицы $U \in \text{UAut}(\mathcal{TH}_4)$ с полностью ненулевой границей существуют. Более того, в п. 3 дано полное описание таких матриц. Нужные нам вспомогательные факты приведены в п. 2.

2. Вспомогательные факты. Нам понадобятся следующие два утверждения, доказанные соответственно в [4, 5].

Теорема 4. Всякая матрица $U \in \text{UAut}(\mathcal{TH}_n)$ центросимметрична либо косоцентросимметрична.

Напомним, что центросимметричной называется $n \times n$ -матрица U , удовлетворяющая соотношению

$$U\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n U. \quad (1)$$

Если вместо (1) выполняется соотношение

$$U\mathcal{P}_n = -\mathcal{P}_n U,$$

то U называют косоцентросимметричной матрицей.

Теорема 5. При $n \geq 4$ унитарная матрица U , для которой $|u_{12}|^2 + |u_{13}|^2 + \dots + |u_{1,n-1}|^2 > 0$, тогда и только тогда принадлежит множеству $\text{UAut}(\mathcal{TH}_n)$, когда существуют нижнетреугольная вещественная теплицева матрица R и числа $\alpha \in \mathbf{C}$, $p, q \in \mathbf{R}$, такие, что $U^*RU = S + \tilde{E}$. В этом равенстве $\tilde{E} = \alpha E_{11} + \bar{\alpha} E_{nn} + p E_{1n} + q E_{n1}$, а S — трехдиагональная теплицева матрица с нулем на главной диагонали и единицей на двух соседних с ней.

Символ E_{ij} — это стандартное обозначение матричной единицы, т.е. матрицы порядка n , единственный ненулевой элемент которой стоит в позиции (i, j) и равен 1.