Вестник Московского университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в ноябре 1946 г.

Серия 15

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И КИБЕРНЕТИКА

№ 4 • 2015 • ОКТЯБРЬ–ДЕКАБРЬ

Издательство Московского университета

Выходит один раз в три месяца

СОДЕРЖАНИЕ

ŋqdbyɐeʏ bƎ dedƎbʎɐe b ɐɔqɔɐɔ Ɉqdbʎqɐè

CONTENTS

УДК 512

А. К. Абдикалыков[1], Х. Д. Икрамов[2], В. Н. Чугунов[3]

УНИТАРНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ ПРОСТРАНСТВА (T+H)-МАТРИЦ ПОРЯДКА 4[*]

В статье рассматриваются матрицы U из унитарной группы $\mathbf{U}_4$, для которых справедлива импликация $\forall A \in \mathcal{TH}_4 \longrightarrow B = U^*AU \in \mathcal{TH}_4$, где $\mathcal{TH}_4$ — множество (T+H)-матриц порядка 4. Такие матрицы можно отождествить с унитарными автоморфизмами пространства $\mathcal{TH}_4$.

Решается вопрос: может ли граница матрицы U не содержать ни одного нуля? (Граница матрицы — это совокупность элементов этой матрицы, стоящих в ее первой и последней строке и первом и последнем столбце.) Показано, что матрицы U с полностью ненулевой границей действительно существуют, что контрастирует с ситуацией для унитарных автоморфизмов пространств теплицевых и ганкелевых матриц порядка 4.

Ключевые слова: теплицева матрица, ганкелева матрица, (T+H)-матрица, характеристический многочлен, унитарное подобие.

1. Введение. Пусть $M_n(\mathbf{C})$ — линейное пространство комплексных $n \times n$-матриц. Обозначим символами $\mathcal{T}_n$, $\mathcal{H}_n$ и $\mathcal{TH}_n$ подпространства этого пространства, образованные соответственно теплицевыми, ганкелевыми и (T+H)-матрицами. Эти последние называются в англоязычной литературе Toeplitz-plus-Hankel matrices и действительно определяются как матрицы, представимые в виде суммы теплицева и ганкелева слагаемого.

Нас интересуют следующие вопросы.

1. Каковы унитарные $n \times n$-матрицы, которые отображают подпространство $\mathcal{T}_n$ в себя, выступая в качестве трансформирующих матриц подобия? Если матрица U обладает этим свойством, то мы пишем $U \in \mathrm{UAut}(\mathcal{T}_n)$. Таким образом, включение $U \in \mathrm{UAut}(\mathcal{T}_n)$ означает импликацию

$$\forall A \in \mathcal{T}_n \longrightarrow B = U^*AU \in \mathcal{T}_n.$$

2. Тот же вопрос 1 по отношению к подпространству $\mathcal{H}_n$ вместо $\mathcal{T}_n$. Соответствующее множество унитарных матриц будем обозначать через $\mathrm{UAut}(\mathcal{H}_n)$.

3. Тот же вопрос 1 с заменой $\mathcal{T}_n$ на $\mathcal{TH}_n$ и множества $\mathrm{UAut}(\mathcal{T}_n)$ на $\mathrm{UAut}(\mathcal{TH}_n)$.

Ответы на вопросы 1 и 2 были даны соответственно в [1] и [2]. Они содержатся в формулируемых ниже теоремах 1 и 2. Для этих формулировок нам придется ввести некоторые обозначения.

Символом $\mathbf{U}_n$ мы обозначаем унитарную группу порядка n, т. е. группу всех унитарных $n \times n$-матриц. Символы $\mathcal{D}_n^{\varepsilon}$ и $\mathcal{P}_n$ используются соответственно для диагональной матрицы $\mathrm{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1})$ и так называемой перъединичной матрицы

$$\begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \cdots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

В частном случае, когда $\varepsilon = -1$, мы пишем $\mathcal{D}_n$ вместо $\mathcal{D}_n^{\varepsilon}$. Таким образом,

$$\mathcal{D}_n = \mathrm{diag}(1, -1, 1, -1, \ldots).$$

Теорема 1. *Группа* $\mathrm{UAut}(\mathcal{T}_n)$ *есть прямое произведение группы* $\mathbf{U}_1$ *и группы, порожденной перъединичной матрицей* $\mathcal{P}_n$ *и матрицами* $\mathcal{D}_n^{\varepsilon}$, *соответствующими всем числам* ε *с модулем* 1.

[1] Факультет ВМК МГУ, заочн. асп., e-mail: adiko2008@gmail.com

[2] Факультет ВМК МГУ, проф., д.ф.-м.н., e-mail: ikramov@cs.msu.su

[3] ИВМ РАН, ведущ. науч. сотр., д.ф.-м.н., e-mail: chugunov.vadim@gmail.com

[*] Работа третьего автора поддержана грантом Российского научного фонда № 14–11–00806.

Теорема 2. *Если $n \geqslant 3$, то* $\mathrm{UAut}(\mathcal{H}_n)$ *есть прямое произведение группы* $\mathbf{U}_1$ *и дискретной группы, порожденной матрицами* $\mathcal{P}_n$ *и* $\mathcal{D}_n$.

Назовем *границей* матрицы A совокупность элементов этой матрицы, стоящих в ее первой и последней строке и первом и последнем столбце. Как видно из теорем 1 и 2, граница каждой из матриц в группах $\mathrm{UAut}(\mathcal{T}_n)$ и $\mathrm{UAut}(\mathcal{H}_n)$ содержит только два ненулевых элемента. Случай $n = 2$ в теореме 2 является примечательным исключением. Оно связано с тем обстоятельством, что всякая симметричная 2×2-матрица A есть в то же время ганкелева матрица. Поэтому группа $\mathrm{UAut}(\mathcal{H}_2)$ должна включать в себя все вещественные ортогональные матрицы 2-го порядка.

Задача о характеризации матриц $U \in \mathrm{UAut}(\mathcal{TH}_n)$ имеет смысл только начиная с $n = 3$. Дело в том, что любая 2×2-матрица A может рассматриваться как (T+H)-матрица, что демонстрирует, например, представление

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}.$$

Группа унитарных автоморфизмов $\mathrm{UAut}(\mathcal{TH}_3)$ описана в нашей статье [3]. Это описание содержится в следующем утверждении.

Теорема 3. *Если $n = 3$, то* $\mathrm{UAut}(\mathcal{TH}_n)$ *есть прямое произведение группы* $\mathbf{U}_1$ *и группы, порожденной матрицами* $\mathcal{D}_3$ *и* $\mathcal{P}_3$, *а также всеми матрицами вида*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta \\ \gamma & \varepsilon & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha = \frac{1}{2}(e^{i\xi} \mp \varepsilon)$, $\beta = -\frac{1}{2}(e^{i\xi} \pm \varepsilon)$, $\gamma = \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{2}}$, $\varepsilon \in [0, 1]$ *и* $\xi \in (-\pi, \pi]$.

Таким образом, большинство матриц из группы $\mathrm{UAut}(\mathcal{TH}_3)$ имеет полностью ненулевую границу α, β, γ. Возникает вопрос: не является ли порядок $n = 3$ для автоморфизмов (T+H)-матриц таким же исключением, каким был случай $n = 2$ для автоморфизмов ганкелевых матриц?

Здесь уместно отметить, что задача описания матриц $U \in \mathrm{UAut}(\mathcal{TH}_n)$ для произвольного n гораздо более трудна, чем аналогичные задачи для $\mathrm{UAut}(\mathcal{T}_n)$ и $\mathrm{UAut}(\mathcal{H}_n)$. Полностью эта задача не решена до сих пор. Что же касается вопроса, поставленного в предыдущем абзаце, то ответ на него дается в настоящем сообщении. Мы показываем, что матрицы $U \in \mathrm{UAut}(\mathcal{TH}_4)$ с полностью ненулевой границей существуют. Более того, в п. 3 дано полное описание таких матриц. Нужные нам вспомогательные факты приведены в п. 2.

2. Вспомогательные факты. Нам понадобятся следующие два утверждения, доказанные соответственно в [4, 5].

Теорема 4. *Всякая матрица* $U \in \mathrm{UAut}(\mathcal{TH}_n)$ *центросимметрична либо косоцентросимметрична.*

Напомним, что центросимметричной называется $n \times n$-матрица U, удовлетворяющая соотношению

$$U\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n U. \tag{1}$$

Если вместо (1) выполняется соотношение

$$U\mathcal{P}_n = -\mathcal{P}_n U,$$

то U называют косоцентросимметричной матрицей.

Теорема 5. *При $n \geqslant 4$ унитарная матрица U, для которой* $|u_{12}|^2 + |u_{13}|^2 + \ldots + |u_{1,n-1}|^2 > 0$, *тогда и только тогда принадлежит множеству* $\mathrm{UAut}(\mathcal{TH}_n)$, *когда существуют нижнетреугольная вещественная теплицева матрица R и числа* $\alpha \in \mathbf{C}$, $p, q \in \mathbf{R}$, *такие, что* $U^*RU = S + \tilde{E}$. *В этом равенстве* $\tilde{E} = \alpha E_{11} + \overline{\alpha} E_{nn} + pE_{1n} + qE_{n1}$, *а S — трехдиагональная теплицева матрица с нулем на главной диагонали и единицей на двух соседних с ней.*

Символ E_{ij} — это стандартное обозначение матричной единицы, т. е. матрицы порядка n, единственный ненулевой элемент которой стоит в позиции (i, j) и равен 1.