

Къ вопросу о давлении діэлектрическаго газа въ электрическомъ полѣ.

Н. Е. Жуковского.

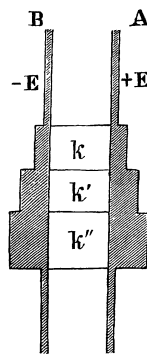
(Читано 29 октября 1893 г.)

§ 1. Въ этой замѣткѣ мы имѣемъ въ виду доказать, что изъ общепринятыхъ формулъ для электрической энергіи системы діэлектриковъ и проводниковъ получается заключеніе о независимости отъ силы электрическаго поля характеристической формулы, выражающей давленіе діэлектрическаго газа по его плотности и температурѣ. Если же въ электрическомъ полѣ имѣется соединеніе насыщеннаго пара съ жидкостью, то сила электрическаго поля не имѣетъ вліянія на величину $p - \frac{c}{\rho}$, гдѣ p и ρ давленіе и плотность пара, а p' и ρ' суть давленіе и плотность жидкости.

Мы будемъ разсматривать діэлектрики, заключенные между двумя листами конденсатора и соприкасающіеся между собою или по поверхностямъ силовыхъ линій, или по эквипотенціальнымъ поверхностямъ.

Первое расположеніе, кажется, было мало спекулируемо математическими физиками. Между тѣмъ оно заслуживаетъ особое вниманіе, такъ какъ позволяетъ дѣлать весьма разнообразныя измѣненія діэлектриковъ, не нарушая однородности электрическаго поля.

§ 2. Вообразимъ (фиг. 1) два весьма широкіе параллельные листа конденсатора A и B , отстоящіе другъ отъ друга на постоянное разстояніе h и заряженные количествами электричества $+\epsilon$ и $-\epsilon$. Между этими листами заключенъ рядъ діэлектриковъ, имѣющихъ формы прямыхъ цилиндровъ съ произвольными основаниями, лежащими на томъ и другомъ листѣ конденсатора. Все остальное пространство представляетъ такъ называемую пустоту, діэлектрическое постоянное которой пусть будетъ k_0 . Назовемъ чрезъ k, k', k'', \dots



Фиг. 1.

діэлектрическія постоянныя разсматриваемыхъ діэ-

лектриковъ и чрезъ $\sigma, \sigma', \sigma'', \dots$ площади, которыми они опираются на листы конденсатора.

Легко усмотрѣть, что въ разсматриваемомъ случаѣ мы получимъ равновѣсіе электричества при однородномъ полѣ, охарактеризованномъ нѣкоторою постоянною силою R , направленною перпендикулярно листамъ отъ A къ B .

При этомъ свободное электричество будетъ лежать на листахъ однородными слоями плотности $\frac{R}{4\pi}$, сообщенное же извѣстъ электричество будетъ имѣть большую плотность на площадяхъ оснований діэлектриковъ и тѣмъ большую, чѣмъ діэлектрическое постоянное болѣе. Это произойдетъ отъ того, что діэлектрикъ съ постояннымъ k выдвинетъ къ листамъ A и B электричество съ плотностью $-kR$ и $+kR$, которое нейтрализуетъ часть сообщеннаго электричества. На фигурѣ представлены схематически плотности сообщеннаго электричества въ предположеніи $k_0 < k < k' < k'' \dots$.

Называя площадь листа конденсатора чрезъ σ_0 , выразимъ все количество ϵ находящагося на немъ сообщеннаго электричества формулой *):

$$\epsilon = R \left(\frac{1 + 4\pi k_0}{4\pi} (\sigma_0 - \sigma - \sigma' - \dots) + \frac{1 + 4\pi k}{4\pi} \sigma + \frac{1 + 4\pi k'}{4\pi} \sigma' + \dots \right)$$

или

$$\epsilon = R (c + (k - k_0) \sigma + (k' - k_0) \sigma' + \dots),$$

гдѣ c нѣкоторое постоянное.

Отсюда находимъ, что

$$R = \frac{\epsilon}{c + (k - k_0) \sigma + (k' - k_0) \sigma' + \dots}. \quad (1)$$

Разность потенциаловъ H при переходѣ отъ листа

*) Чтобы устранивъ всякое сомнѣніе относительно краевъ конденсатора, можно вообразить безконечно широкій конденсаторъ, разбитый на квадраты, въ которыхъ симметрично повторяются расположенія діэлектриковъ k, k', k'', \dots , и разсматривать одинъ такой квадратъ.

В къ листу A , и электрическая энергія w всей разсматриваемой системы выражаются формулами:

$$H = Rh,$$

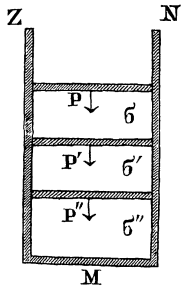
$$w = \frac{\varepsilon}{2} H = \frac{\varepsilon}{2} Rh.$$

Подставляя сюда величину R , получимъ:

$$H = \frac{\varepsilon h}{c + (k - k_0)\sigma + (k' - k_0)\sigma' + \dots}, \quad (2)$$

$$w = \frac{\varepsilon^2 h}{2(c + (k - k_0)\sigma + (k' - k_0)\sigma' + \dots)}. \quad (3)$$

Вообразимъ теперь, что плоскость листа конденсатора A совпадаетъ съ плоскостью чертежа и что разсматриваемые діэлектрики суть газы, заключенные (фиг. 2) въ прямоугольной коробкѣ ZMN , образованной стеклянными стѣнками, перпендикулярными листамъ конденсатора, и самими этими листами.



Фиг. 2.

Газы отдѣляются отъ пустоты и раздѣляются между собою нѣкоторыми стеклянными поршнями, могущими свободно скользить по стѣнкамъ коробки. Всѣ члены, стоящіе въ знаменателяхъ форм. (2) и (3) и относящіеся къ стѣнкамъ сосуда и поршнямъ, будемъ считать включенными въ постоянное c , такъ что $k, k', k'', \dots, \sigma, \sigma', \sigma'', \dots$ будутъ величины, относящіяся только къ однимъ разсматриваемымъ газамъ. Назовемъ чрезъ p, p', p'', \dots давления этихъ газовъ и предположимъ, что на упомянутые поршни дѣйствуютъ еще нѣкоторыя вѣншія силы, которыя отнесенныя къ единицѣ площади поршней пусть будутъ: P, P', P'', \dots Будемъ считать эти силы положительными, когда онѣ направлены внизъ.

Если закрѣпимъ всѣ поршни и сдѣлаемъ свободнымъ одинъ изъ нихъ, напримѣръ второй, то по принципу сохраненія ε и началу возможныхъ перемѣщеній найдемъ, что

$$(P' + p - p') h d\sigma - \left(\frac{dw}{d\sigma} - \frac{dw}{d\sigma'} \right) d\sigma = 0,$$

откуда:

$$P' = p' - \frac{dw}{hd\sigma'} - \left(p - \frac{dw}{hd\sigma} \right).$$

На основаніи такихъ разсужденій всѣ вѣншія силы, дѣйствующія на поршни, выразятся формулами:

$$P = p - \frac{dw}{hd\sigma'},$$

$$P' = p' - \frac{dw}{hd\sigma'} - \left(p - \frac{dw}{hd\sigma} \right), \quad (4)$$

$$P'' = p'' - \frac{dw}{hd\sigma''} - \left(p' - \frac{dw}{hd\sigma'} \right),$$

.....

Когда на поршень, раздѣляющій два діэлектрические газа, не дѣйствуетъ никакой вѣншей силы, то изъ форм. (4) мы сейчасъ же найдемъ разность давленій этихъ газовъ.

Положивъ $P' = 0$ и обративъ вниманіе на форм. (3) и (1), получимъ:

$$p - p' = \frac{R^2}{2} (k' - k - (\theta' - \theta)). \quad (5)$$

Здѣсь положено, что

$$\sigma \frac{dk}{d\sigma} = \frac{dk}{d\lg\sigma} = - \frac{dk}{d\lg\rho} = -\theta,$$

гдѣ ρ плотность газа; такое же значеніе имѣетъ и коэффициентъ θ' .

Коэффициенты θ , какъ показываетъ опытъ, суть весьма незначительныя величины сравнительно съ k ; поэтому при $k' > k$ будемъ имѣть изъ форм. (5) $p > p'$, т. е. два смежные діэлектрические газа могутъ быть въ равновѣсіи только въ томъ случаѣ, когда давленіе менѣе совершеннаго діэлектрика изъ нихъ (у котораго діэлектрическое постоянное болѣе) будетъ меньше давленія болѣе совершеннаго. Если давленія обоихъ газовъ равны, то діэлектрикъ менѣе совершенный будетъ расширяться и сжимать болѣе совершенный до тѣхъ поръ, пока разность давленій не достигнетъ указанной величины.

§ 3. Обращаемся къ опредѣленію измѣненія давленій p, p', p'', \dots съ измѣненіемъ ε . Этотъ вопросъ разрѣшается по принципу свободной энергіи, установленному Гельмгольтцемъ *).

Свободная энергія выражается форм.

$$F = U - T\epsilon,$$

гдѣ U полная энергія разсматриваемой системы, ϵ ея энтропія, а T одинаковая для всѣхъ частей системъ абсолютная температура. Въ нашемъ случаѣ, какъ U , такъ и ϵ суть функціи отъ $\varepsilon, T, \sigma, \sigma', \sigma'', \dots$, такъ что при постоянной температурѣ свободная энергія является функціею только геометрическихъ размѣровъ системы и количества сообщеннаго электричества на листахъ конденсатора.

Пусть наша система совершаетъ обратимый изо-

*) Helmholtz. Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd. II, S. 958.

термический процесс вследствие того, что силы $P, P', P'' \dots$ и количество электричества ε непрерывно изменяются.

Отрицательное приращение свободной энергии будет равно работѣ, потраченной на преодоленіе внѣшнихъ силъ, а также и работѣ, выделяемой системой при переходѣ электричества отъ болѣе высокаго потенциала къ болѣе низкому. Вслѣдствіе этого $-dF = P(d\sigma + d\sigma' + d\sigma'' + \dots)h + P'(d\sigma' + d\sigma'' + \dots)h + \dots - Hd\varepsilon$.

Подставляя сюда величины P, P', \dots изъ форм. (4) и замѣчая, что на основаніи форм. (3) и (2)

$$H = \frac{dw}{d\varepsilon},$$

получаемъ:

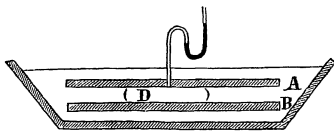
$$-dF = \left(ph - \frac{dw}{d\sigma} \right) d\sigma + \left(p'h - \frac{dw}{d\sigma'} \right) d\sigma' + \dots - \frac{dw}{d\varepsilon} d\varepsilon \quad (6)$$

Вторая часть этого равенства должна быть полнымъ дифференціаломъ функціи переменныхъ: $\varepsilon, \sigma, \sigma', \sigma'' \dots$; поэтому

$$\frac{dp}{d\varepsilon} = \frac{dp'}{d\varepsilon} = \frac{dp''}{d\varepsilon} = \dots = 0 \quad (7)$$

Мы видимъ, что давленія $p, p', p'' \dots$ рассматриваемыхъ діэлектрическихъ газовъ не зависятъ отъ ε и имѣютъ тѣ же величины, какія имѣлись бы при данныхъ $T, \sigma, \sigma', \dots$ въ случаѣ $\varepsilon = 0$. Такимъ образомъ давленіе діэлектрическаго газа въ разсмотрѣнномъ электрическомъ полѣ опредѣляется по его плотности и температурѣ обыкновенною формулою Мариотта-Гейлюсака.

§ 4. Вслѣдствіе сказаннаго измѣненіе объемовъ рассматриваемыхъ діэлектриковъ съ измѣненіемъ ε должно объясняться только измѣненіемъ скачка въ гидростатическомъ давленіи, совершающагося на поверхности соприкосновенія діэлектриковъ. Эти скачки подобны тѣмъ, которые рассматриваются въ теоріи капиллярныхъ явленій, причѣмъ поверхность соприкосновенія аналогична капиллярной поверхности, обращенной вогнутостью въ сторону болѣе совершеннаго діэлектрика.



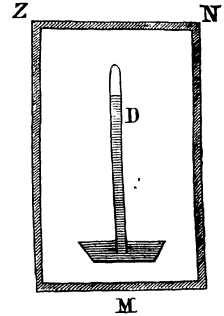
Фиг. 3.

Въ извѣстномъ опытѣ Quincke (фиг. 3) воздушный пузырь D , заключенный между листами конденсатора A и B , заполненнаго терпентиномъ, сжимается, уступая мѣсто менѣе совершенному ді-

электрику — терпентину. При этомъ давленіе воздуха въ пузырь возрастаетъ до тѣхъ поръ, пока разность давленій воздуха и терпентина не достигаетъ величины, даваемой форм. (5).

Если вообразимъ (фиг. 4)

между двумя конденсаторными листами стеклянная стѣнки ZMN , наполненная воздухомъ, а внутри ихъ барометръ D , ограниченный стекломъ и наполненный терпентиномъ, причѣмъ плоскость чертежа совпадаетъ съ плоскостью листа конденсатора A и всѣ стеклянные стѣнки расположены, какъ объяснено въ § 2, то придемъ къ заключенію, что съ увеличиваніемъ силы поля барометръ будетъ подниматься. Это оттого, что (менѣе совершенный діэлектрикъ) воздухъ будетъ расширяться на счетъ (болѣе совершеннаго діэлектрика) барометрической пустоты.



Фиг. 4.

Не принимая во вниманіе скачка въ гидростатическихъ давленіяхъ и желая объяснить оба упомянутыя явленія измѣненіемъ характеристической формулы воздуха въ электрическомъ полѣ, мы бы должны были допустить изъ перваго опыта, что съ увеличиваніемъ силы поля давленіе воздуха уменьшается, а изъ второго, что оно увеличивается отъ той же причины.

Не принимая во вниманіе скачка въ гидростатическихъ давленіяхъ и желая объяснить оба упомянутыя явленія измѣненіемъ характеристической формулы воздуха въ электрическомъ полѣ, мы бы должны были допустить изъ перваго опыта, что съ увеличиваніемъ силы поля давленіе воздуха уменьшается, а изъ второго, что оно увеличивается отъ той же причины.

Скажемъ еще нѣсколько словъ о діэлектрикѣ переменной плотности. Если предположимъ (фиг. 1), что діэлектрики k, k', k'', \dots расположены весьма узкими слоями, причѣмъ постоянное k измѣняется постепенно, то перейдемъ въ предѣлѣ къ неоднородному діэлектрику. Вообразимъ нѣкоторую ортогональную линію къ поверхностямъ равнаго k и назовемъ ея длину чрезъ s . По форм. (5) напишемъ:

$$-\frac{dp}{ds} ds = \frac{R^2}{2} \left[\frac{dk}{ds} - \frac{d}{ds} \left(\rho \frac{dk}{d\rho} \right) \right] ds = \frac{R^2}{2} \left(\frac{dk}{ds} - \frac{dk}{d\rho} \frac{d\rho}{ds} - \rho \frac{d}{ds} \left(\frac{dk}{d\rho} \right) \right) ds$$

или

$$\frac{dp}{ds} = \frac{R^2}{2} \rho \frac{d}{ds} \left(\frac{dk}{d\rho} \right).$$

Раздѣляя на ρ и интегрируя, находимъ:

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{R^2}{2} \frac{0}{\rho} + const. \quad (6)$$

По этой формулѣ опредѣляется разность давленій въ двухъ точкахъ неоднороднаго діэлектрика, при-