

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКЕ

Учебно-методическое пособие для вузов

Составитель
Г.Ю. Северин

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2010

1 Введение

Большинство задач, с которыми сталкиваются специалисты в области прикладной математики, обнаруживают существенные особенности, которые не позволяют получать точные аналитические решения. Такими особенностями являются, например, нелинейности, переменные коэффициенты, границы сложной формы и т.д. Мало того, если даже точное решение задачи явно найдено, оно может оказаться бесполезным для физической интерпретации или численных расчётов. Для получения информации о решении уравнений исследователь вынужден прибегнуть к аппроксимациям, численным решениям или к сочетанию этих двух методов. В этом пособии рассмотрены метод усреднения, метод погранфункций решения сингулярно возмущённых обыкновенных дифференциальных уравнений и метод интегральных многообразий, позволяющий в некоторых случаях понизить размерность системы до двух. Теоремы приведены без доказательств, сделан акцент на описании методов и рассмотрении простых примеров.

2 Высшие приближения метода двух масштабов на полуоси для нелинейных систем с периодическими коэффициентами

На полуоси $[0, \infty)$ построим асимптотику решения нелинейной задачи Коши с малым параметром $\varepsilon > 0$

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon F(\tau, x(\tau)), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

$F(\tau, x) = A(x) + \sum_{i=1}^r B_i(x) \sin(i\tau) + C_i(x) \cos(i\tau), \quad x \in G \subset \mathbb{R}^m,$
отображения $A(x), B_i(x), C_i(x) \quad (i = 1, \dots, r)$ $n + 1$ раз непрерывно дифференцируемы по Фреше, нормы производных

$dw_{i+1}/d\tau$. Третье слагаемое также будет иметь по τ нулевое среднее на отрезке $[0, 2\pi]$, но будет зависеть от t и τ , экспоненциально стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$ равномерно по τ на отрезке $[0, 2\pi]$ и будет приравниваться к $\partial v_{i+1}/\partial\tau$, откуда $v_{i+1}(t, \tau)$ будет находиться интегрированием по τ при фиксированном t .

Подставляя $x_n(t, \tau, \varepsilon)$ вместо x в (1) и используя разложение Тейлора функции $F(\tau, x)$ в малой окрестности нулевого приближения $x = u_0(t)$, имеем

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left(\frac{du_0}{dt} + \frac{\partial v_1}{\partial\tau} + \frac{dw_1}{d\tau} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial\tau} + \frac{dw_2}{d\tau} \right) + \dots + \\ & + \varepsilon^{n+1} \left(\frac{du_n}{dt} + \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{\partial v_{n+1}}{\partial\tau} + \frac{dw_{n+1}}{d\tau} \right) + \dots = \varepsilon A(u_0) + \\ & + \varepsilon^2 A'(u_0) H_n + \dots + \frac{\varepsilon^{n+1}}{n!} A^{(n)}(u_0) \times H_n \times \dots \times H_n + \dots + \quad (4) \\ & + \sum_{i=1}^r \left[B_i(u_0) + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} B_i^{(n)}(u_0) \times H_n \times \dots \times H_n + \dots \right] \sin(i\tau) + \\ & + \sum_{i=1}^r \left[C_i(u_0) + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} C_i^{(n)}(u_0) \times H_n \times \dots \times H_n + \dots \right] \cos(i\tau), \end{aligned}$$

где $H_n(t, \tau, \varepsilon) = \varepsilon[u_1 + v_1 + w_1] + \dots + \varepsilon^n[u_n + v_n + w_n] = O(\varepsilon)$.

Выделим в (4) слагаемые первой степени по ε :

$$\frac{du_0}{dt} + \frac{\partial v_1}{\partial\tau} + \frac{dw_1}{d\tau} = A(u_0) + \sum_{i=1}^r \left[B_i(u_0) \sin(i\tau) + C_i(u_0) \cos(i\tau) \right].$$

Так как $u_0(t)$ есть решение усредненной системы (2), то

$$\frac{\partial v_1}{\partial\tau} + \frac{dw_1}{d\tau} = \sum_{i=1}^r \left[B_i(x^*) \sin(i\tau) + C_i(x^*) \cos(i\tau) \right] + \quad (5)$$

$$+ \sum_{i=1}^r \left\{ \left[B_i(u_0) - B_i(x^*) \right] \sin(i\tau) + \left[C_i(u_0) - C_i(x^*) \right] \cos(i\tau) \right\}.$$

Естественно выбрать в качестве $w_1(\tau)$ 2π -периодическое решение уравнения

$$\frac{dw_1}{d\tau} = \sum_{i=1}^r \left[B_i(x^*) \sin(i\tau) + C_i(x^*) \cos(i\tau) \right],$$

имеющее нулевое среднее по τ на отрезке $[0, 2\pi]$.

Таким образом, из уравнения (5) однозначно определяются функции $v_1(t, \tau)$ и $w_1(\tau)$

$$v_1(t, \tau) = \sum_{i=1}^r \left\{ [C_i(u_0) - C_i(x^*)] \frac{\sin(i\tau)}{i} - [B_i(u_0) - B_i(x^*)] \frac{\cos(i\tau)}{i} \right\};$$

$$w_1(\tau) = \sum_{i=1}^r \left[C_i(x^*) \frac{\sin(i\tau)}{i} - B_i(x^*) \frac{\cos(i\tau)}{i} \right].$$

Пусть предложенным выше способом мы определили все функции $u_i(t)$, $v_{i+1}(t, \tau)$, $w_{i+1}(\tau)$, ($i = 0, \dots, n-1$). Причём, $u_i(t) \rightarrow u_i(\infty)$, $v_{i+1}(t, \tau) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и $v_{i+1}(t, \tau)$, $w_{i+1}(\tau)$ имеют нулевые средние по τ на $[0, 2\pi]$.

Очевидно, на n -м шаге (т.е. приравнивая в (4) слагаемые при ε^{n+1}) получим уравнение

$$\frac{du_n}{dt} + \frac{\partial v_{n+1}}{\partial \tau} + \frac{dw_{n+1}}{d\tau} = K_n(u_0(t), \dots, u_n(t), \tau),$$

где 2π -периодическая по τ функция $K_n(u_0, \dots, u_n, \tau)$ удовлетворяет условию Липшица по u_0, \dots, u_n .

Из последнего равенства сначала находим $u_n(t)$ как решение линейной начальной задачи, а затем $w_{n+1}(\tau)$, $v_{n+1}(t, \tau)$ интегрированием по τ .

ТЕОРЕМА. Найдутся такие $\varepsilon_0 > 0$, $L > 0$, что при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ погрешность метода $\|x(t, \varepsilon) - x_n(t, \tau, \varepsilon)\|$ удовлетворяет оценке

$$\|x(t, \varepsilon) - x_n(t, \tau, \varepsilon)\| < L\varepsilon^n$$

равномерно по $(t, \tau) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi]$.

2.1 Пример построения асимптотики методом усреднения

Рассмотрим на полуоси $[0, \infty)$ нелинейную начальную задачу

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3 + x^2 \sin \tau, \quad x_0 = 0.5, \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}.$$

Усреднённое по τ уравнение, очевидно, имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3.$$

Оно имеет три положения равновесия $x = -1, x = 0, x = 1$. Точки $x = \pm 1$ устойчивы, а $x = 0$ неустойчива. Очевидно, полуось $[0, \infty)$ область притяжения корня $x = 1$.

Приближённое решение $x_n(t, \tau, \varepsilon)$ этой задачи будем искать в виде функции двух независимых переменных t, τ на $[0, \infty) \times [0, \infty)$

$$x_n(t, \tau, \varepsilon) = u_0 + \varepsilon[u_1 + v_1] + \dots + \varepsilon^n[u_n + v_n].$$

Здесь $v_i(t, \tau)$ – неизвестные, 2π -периодические по τ функции с нулевым средним по τ на $[0, 2\pi]$. Кроме того, $v_i(t, \tau) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $\tau \in [0, \infty)$.

Подставляя $x_n(t, \tau, \varepsilon)$ вместо x , имеем

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{dt} + \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + \varepsilon \left(\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial \tau} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{du_2}{dt} + \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_3}{\partial \tau} \right) + \dots = \\ = u_0 + \varepsilon(u_1 + v_1) + \dots - (u_0 + \varepsilon(u_1 + v_1) + \dots)^3 + \sin \tau (u_0 + \varepsilon(u_1 + v_1) + \dots)^2. \end{aligned}$$