«Оптика атмосферы и океана», **25**, № 10 (2012)

ОПТИКА СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

УДК 535.2:621.373.826; 520.1; 520.16

Особенности дрожания изображения оптического источника в случайной среде с конечным внешним масштабом

Л.А. Больбасова[1], П.Г. Ковадло[2], В.П. Лукин[1], В.В. Носов[1], А.В. Торгаев[1]*

[1]Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1
[2]Институт солнечно-земной физики СО РАН
664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 126, а/ я 4026

Поступила в редакцию 14.03.2012 г.

Рассмотрены особенности флуктуаций оптических волн при распространении в случайно-неоднородной турбулентной среде с *конечным внешним масштабом*, в том числе и в условиях, когда в атмосфере наблюдаются области с преобладающим влиянием одной крупной когерентной структуры, для которой спектр турбулентности может существенно отличаться от спектра колмогоровской модели. С использованием приближенной модели спектра для когерентной турбулентности, ранее обоснованной в наших работах, выполнены расчеты дисперсии смещений изображения оптического источника (в условиях применимости метода плавных возмущений). Сравнение этих формул с известными аналогичными выражениями для колмогоровской турбулентности показало, что при одинаковых условиях рассмотренные дисперсии флуктуаций в когерентной турбулентности существенно меньше, чем в колмогоровской. Это означает, что в когерентной турбулентности происходит значительное ослабление фазовых флуктуаций оптического излучения. Отмечается важность этого вывода для трактовки результатов оптического зондирования атмосферной турбулентности.

Ключевые слова: турбулентность, дрожание изображения, внешний масштаб; turbulence, image flutter, outer scale.

Введение

Экспериментальные исследования в атмосфере показывают, что наблюдаются области с существенным отклонением от традиционно применяемой для описания колмогоровской турбулентности. Одна из возможных причин – это влияние конечности внешнего масштаба турбулентности [1–5]. В частности, возможна реализация следующей ситуации, когда имеет место преобладающее влияние одной крупной структуры [6]. Турбулентность в таких областях принято называеть когерентной. Гидродинамической когерентной структурой называется компактное образование, включающее в себя долгоживущую пространственную структуру-ячейку (возникающую в результате продолжительного действия термодинамических градиентов) и продукты ее дискретного когерентного каскадного распада. В расширенном понимании когерентная структура является *солитонным решением уравнений гидродинамики* [6] и включает в себя как крупномасштабную, так и мелкомасштабную турбулентность. Как показали результаты наших ранних оптических измерений [7–10], в открытой атмосфере часто наблюдаются оптические проявления действия протяженных областей, в которых определяющее влияние имеет одна когерентная структура. Возникает вопрос о возможности влияния на дрожание оптических изображений именно когерентной турбулентности. Этот вопрос следует считать важным, например, для задач наземной астрономии.

1. Влияние внешнего масштаба турбулентности на дисперсию дрожания изображения

Известно, что случайное смещение положения центра тяжести изображения удаленного оптического источника, формирующего плоский волновой фронт, характеризуется положением энергетического центра тяжести $\rho_F^{\text{пл}}$, которое в первом приближении (пренебрежение амплитудными флуктуациями) (см. [11, формула (7.84)]) дается выражением

$$\rho_F^{\text{пл}} = -\frac{F}{k\Sigma}\iint\limits_{\Sigma} d^2\rho_1 \nabla S(\rho_1). \qquad (1)$$

В приближении геометрической оптики градиент фазовых флуктуаций $\nabla S(\rho_1)$ (1) для плоской волны можно записать в следующем виде:

* Лидия Адольфовна Больбасова; Павел Гаврилович Ковадло; Владимир Петрович Лукин (lukin@iao.ru); Виктор Викторович Носов (nosov@iao.ru); Андрей Витальевич Торгаев.

$$\nabla S(\boldsymbol{\rho}_1) = i\int_0^X d\xi_1 \iint d^2 n(\boldsymbol{\kappa}_1, X-\xi_1)\boldsymbol{\kappa}_1 \exp(i\boldsymbol{\kappa}_1\boldsymbol{\rho}_1), \quad (2)$$

где F — фокусное расстояние оптической системы; X — расстояние, которое прошла оптическая волна в турбулентной атмосфере; $d^2 n(\boldsymbol{\kappa}_1, X-\xi_1)$ — двумерная спектральная плотность флуктуаций показателя преломления атмосферы; k — волновое число оптического излучения.

Тогда, по аналогии с вычислениями в [12, 13], получим выражение для дисперсии дрожания центра тяжести изображения $<(\rho_F^{\text{пл}})^2>$ в виде

$$<(\rho_F^{\text{пл}})^2> = \frac{F^2}{\Sigma^2}\int_\Sigma d^2\rho_1 \int_\Sigma d^2\rho_2 \int_0^X d\xi_1 \int_0^X d\xi_2 \times$$

$$\times \iint < d^2 n(\boldsymbol{\kappa}_1, X-\xi_1)\, d^2 n(\boldsymbol{\kappa}_2, X-\xi_2) > \times$$

$$\times\, \boldsymbol{\kappa}_1 \exp(i\boldsymbol{\kappa}_1\boldsymbol{\rho}_1)\boldsymbol{\kappa}_2 \exp(-i\boldsymbol{\kappa}_2\boldsymbol{\rho}_2). \quad (3)$$

Здесь угловые скобки обозначают операцию усреднения по ансамблю флуктуаций показателя преломления атмосферы.

Используя представление [11]:

$$< d^2 n(\boldsymbol{\kappa}_1, X-\xi_1)\, d^2 n(\boldsymbol{\kappa}_2, X-\xi_2) > =$$

$$= 2\pi\delta(\boldsymbol{\kappa}_1-\boldsymbol{\kappa}_2)\delta(\xi_1-\xi_2)\Phi_n(\boldsymbol{\kappa}_1,\xi_1)d^2\kappa_1 d^2\kappa_2, \quad (4)$$

в результате подстановки в (3) получаем

$$<(\rho_F^{\text{пл}})^2> = \frac{2\pi F^2}{\Sigma^2}\int_\Sigma d^2\rho_1 \int_\Sigma d^2\rho_2 \int_0^X d\xi \times$$

$$\times \iint d^2\kappa\kappa^2\Phi_n(\boldsymbol{\kappa},\xi)\exp\big(i\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2)\big). \quad (5)$$

Далее воспользуемся (для простоты расчетов) гауссовой апертурой эффективного размера R, для которой площадь

$$\Sigma = \int_\Sigma d^2\rho = 2\pi\int_0^\infty d\rho\rho\exp(-\rho^2/R^2) = \pi R^2, \quad (6)$$

а также

$$\iint_\Sigma d^2\rho\exp(i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\rho}) = 2\pi\int_0^\infty d\rho\rho J(\kappa\rho)\exp(-\rho^2/R^2) =$$

$$= \pi R^2\exp(-\kappa^2R^2/4),$$

где J — функция Бесселя. Тогда можно, используя гауссову приемную апертуру, перейти к следующему выражению для (5):

$$<(\rho_F^{\text{пл}})^2> = 2\pi^2F^2\int_0^X d\xi \times$$

$$\times \iint d^2\kappa\kappa^2\Phi_n(\boldsymbol{\kappa},\xi)\exp(-\kappa^2R^2/2). \quad (7)$$

Для вычислений интегралов в выражении (7) необходимо использовать ту или иную модель спектра турбулентности среды, в которой распространяется оптическое излучение. В дальнейшем будем применять различные модели атмосферной турбулентности, учитывающие конечность величины внешнего масштаба турбулентности, а именно изотропную модель Кармана [5, 12]:

$$\Phi_n(\kappa,\xi) = 0{,}033C_n^2(\xi)(\kappa^2+\kappa_0^2)^{-11/6}\exp(-\kappa^2/\kappa_m^2), \quad (8)$$

и модель, предложенную в публикациях [12, 13]:

$$\Phi_n(\kappa,\xi) = 0{,}033C_n^2(\xi)\kappa^{-11/3}\times$$

$$\times\left\{1-\exp(-\kappa^2/\kappa_0^2)\right\}\exp(-\kappa^2/\kappa_m^2). \quad (9)$$

В наших работах [14, 15] было показано, что соответствующие внешние масштабы для моделей (8) и (9) связаны простым численным коэффициентом, поэтому практически можно выполнять расчеты флуктуаций оптических характеристик с любым из этих спектров.

Так, для российской модели (9) можно получить из (5) (при условии, что $\kappa_0^{-1} \gg R$)

$$<(\rho_F^{\text{пл}})^2> = 2\pi^2F^2 0{,}033\Gamma(1/6)\times$$

$$\times\int_0^X d\xi C_n^2(\xi)\left[\frac{R^{-1/3}}{2^{1/6}}-\kappa_0^{1/3}\right]. \quad (10)$$

Для случая наблюдения дрожания звезды с использованием астрономического телескопа нужно положить верхний предел интегрирования в (10) равным ∞. Тогда получаем, что дисперсия углового дрожания изображения может быть рассчитана по следующей формуле:

$$<(\rho_F^{\text{пл}})^2>/F^2 = <(\varphi_F^{\text{пл}})^2> \approx$$

$$\approx 3{,}23R^{-1/3}\int_0^\infty d\xi C_n^2(\xi)\left[1-(\kappa_0^2R^2/2)^{1/6}\right]. \quad (11)$$

Далее воспользуемся так называемым «эффективным внешним масштабом турбулентности» для всей атмосферы в целом, который может быть введен на основе следующей формулы (см., например, [16]):

$$(\kappa_0^*)^{-1} = \left[\int_0^\infty d\xi C_n^2(\xi)\kappa_0^{1/3}\Big/\int_0^\infty d\xi C_n^2(\xi)\right]^{-3}. \quad (12)$$

Используя радиус когерентности атмосферной турбулентности r_0 вида

$$r_0 \approx \left(k^2\int_0^\infty d\xi C_n^2(\xi)\right)^{-3/5}, \quad (13)$$

можно в итоге получить для дисперсии углового дрожания изображения в фокальной плоскости телескопа следующее выражение:

$$<(\varphi_F^{\text{пл}})^2> \approx 3{,}23R^{-1/3}r_0^{-5/3}k^{-2}\left[1-2^{-1/6}(\kappa_0^*R)^{1/3}\right]. \quad (14)$$

Проанализируем действие второго члена в квадратных скобках выражения (14), обусловливающего отличие поведения дисперсии дрожания изображения как функции размера приемной апертуры R от степенной зависимости вида $R^{-1/3}$. В таблице приведены результаты расчетов поведения дисперсии дрожания изображения для различных значений отношения эффективного внешнего масштаба турбулентности для атмосферы в целом κ_0^* к размеру приемной аппретуры телескопа R.

$(\kappa_0^* R)^{-1}$	1000	300	100	50	30	10	5
$\left[1-2^{-1/6}(\kappa_0^* R)^{1/3}\right]$	0,91	0,87	0,80	0,75	0,70	0,57	0,42

Анализ таблицы показывает, что даже при отношении внешнего масштаба к размеру приемной апертуры порядка 10^3 отличие поведения дисперсии дрожания изображения от степенного закона ($\approx R^{-1/3}$) [11] проявляется достаточно сильно, т.е. влияние внешнего масштаба на дрожание изображения остается значительным.

2. Действие когерентной турбулентности

Покажем, что для кармановского спектра атмосферной турбулентности (8) расчет для интеграла (7) дает следующее выражение:

$$\int_0^\infty d\kappa\kappa^3 \frac{\exp(-\kappa^2 R^2/2)}{(\kappa^2+\kappa_0^2)^{11/6}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma(-1/6)}{\Gamma(11/6)}\kappa_0^{1/3}\,{}_1F_1(2,\,7/6;\,\kappa_0^2R^2/2) + \right.$$

$$\left. + \Gamma(1/6)(R_0^2/2)^{-1/6}\,{}_1F_1(11/6, 5/6; \kappa_0^2 R^2/2)\right], \qquad (15)$$

а так как всегда $\kappa_0^2 R^2/2 \ll 1$, получаем в итоге

$$\int_0^\infty d\kappa\kappa^3 \frac{\exp(-\kappa^2 R^2/2)}{(\kappa^2+\kappa_0^2)^{11/6}} \approx \frac{\Gamma(1/6)}{2^{5/6}} R_0^{-1/3} - \frac{18}{5}\kappa_0^{1/3}. \quad (16)$$

Далее сопоставим поведение дрожания изображения для колмогоровской и когерентной турбулентности. Приближенная модель спектра турбулентности в условиях проявления одной когерентной турбулентной структуры ранее была получена в наших работах [7–10]. Проведем вычисления интеграла в выражении (7) для модели когерентной турбулентности следующего вида:

$$\Phi_n^{\text{ког}}(\kappa,\xi) = 0{,}033\left(C_n^2(\xi)\right)^{\text{ког}}(\kappa^2+\kappa_0^2)^{-7/3}\exp(-\kappa^2/\kappa_m^2), \qquad (17)$$

при этом получаем, что для интеграла из (7)

$$\int_0^\infty d\kappa\kappa^3 \frac{\exp(-\kappa^2 R^2/2)}{(\kappa^2+\kappa_0^2)^{7/3}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(7/3)}\kappa_0^{-2/3}\,{}_1F_1(2,\,2/3;\,\kappa_0^2R^2/2) + \right.$$

$$\left. + \Gamma(-1/3)(R_0^2/2)^{1/3}\,{}_1F_1(7/3,\,4/3;\,\kappa_0^2R^2/2)\right]. \qquad (18)$$

При условии, что $\kappa_0^2 R^2/2 \ll 1$, это приводит к выражению для когерентной турбулентности

$$< (\varphi_F^{\text{пл}})^2 > = 2\pi^2 0{,}033 \int_0^\infty d\xi\left(C_n^2(\xi)\right)^{\text{ког}} \times$$

$$\times \left[\frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(7/3)}\kappa_0^{-2/3} - 3\Gamma(2/3)(R^2/2)^{1/3}\right]. \qquad (19)$$

Далее (19) можно переписать в виде

$$< (\varphi_F^{\text{пл}})^2 > = 2\pi^2 0{,}033 \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(7/3)} \int_0^\infty d\xi\left(C_n^2(\xi)\right)^{\text{ког}} \times$$

$$\times\, \kappa_0^{-2/3}\left[1 - 3\Gamma(2/3)(R^2/2)^{1/3}\right] \approx$$

$$\approx 1{,}46\int_0^\infty d\xi\left(C_n^2(\xi)\right)^{\text{ког}}\kappa_0^{-2/3}\left[1-3\Gamma(2/3)(R^2/2)^{1/3}\right]. \quad (20)$$

При корректном сравнении действия когерентной и традиционной колмогоровской турбулентности необходимо обеспечить равенство энергии турбулентности для используемых спектров вида (8) и (17), т.е. обеспечить равенство следующих интегралов:

$$\int_0^\infty d\kappa\kappa\Phi_n^{\text{ког}}(\kappa) = \int_0^\infty d\kappa\kappa\Phi_n(\kappa).$$

Так, для колмогоровской модели вида (8) энергия равна:

$$\int_0^\infty d\kappa\kappa\Phi_n(\kappa) = 0{,}033\frac{C_n^2}{2}\left[\frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(11/6)}\kappa_0^{-5/3}\,{}_1F_1(1, 1/6;\,\kappa_0^2/\kappa_m^2) + \right.$$

$$\left. + \Gamma(-5/6)\kappa_m^{-5/3}\,{}_1F_1(11/6,\,11/6;\,\kappa_0^2/\kappa_m^2)\right], \qquad (21)$$

при $\kappa_0^2/\kappa_m^2 \ll 1$ получаем

$$\int_0^\infty d\kappa\kappa\Phi_n(\kappa) \approx \frac{3}{5}0{,}033 C_n^2(\xi)\kappa_0^{-5/3}. \qquad (22)$$

Для модели когерентной турбулентности вида (17)

$$\int_0^\infty d\kappa\kappa\Phi_n^{\text{ког}}(\kappa) = 0{,}033\frac{(C_n^2)^{\text{ког}}}{2} \times$$

$$\times \left[\frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(7/3)}\kappa_0^{-8/3}\,{}_1F_1(1,\,-1/3;\,\kappa_0^2/\kappa_m^2) + \right.$$

$$\left. + \Gamma(-4/3)\kappa_m^{-8/3}\,{}_1F_1(7/3,\,7/3;\,\kappa_0^2/\kappa_m^2)\right], \qquad (23)$$

при $\kappa_0^2/\kappa_m^2 \ll 1$ имеем

$$\int_0^\infty d\kappa\kappa\Phi_n^{\text{ког}}(\kappa) \approx \frac{3}{8}0{,}033(C_n^2)^{\text{ког}}\kappa_0^{-8/3}. \qquad (24)$$