

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Северный (Арктический) федеральный университет
имени М.В. Ломоносова»

Л.В. Балабко, А.В. Томилова

Численные методы

Учебное пособие

Архангельск



ИД САФУ
2014

УДК 518(975)
ББК 38я(75)
Б20

*Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом
Северного (Арктического) федерального университета
имени М.В. Ломоносова*

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук, доцент **И.В. Коноплева**,
кандидат физико-математических наук, доцент **Б.М. Постников**

Балабко, Л.В.

Б20 Численные методы: учеб. пособие / Л.В. Балабко, А.В. Томилова;
Сев. (Арктич.) федер. ун-т им. М.В. Ломоносова. – Архангельск:
ИД САФУ, 2014. – 163 с.
ISBN 978-5-261-00962-7

В пособии представлены теоретические основы численных методов в математике: элементарная теория погрешностей, численное решение уравнений, методы решения систем линейных уравнений, численное интегрирование и дифференцирование, методы решения дифференциальных уравнений, а также варианты заданий для лабораторных работ.

Издание адресовано студентам вузов, обучающимся по направлениям подготовки «Мехатроника и робототехника», «Автоматизация технологических процессов и производств», «Электроэнергетика и электротехника».

УДК 518(975)
ББК 38я(75)

ISBN 978-5-261-00962-7

© Балабко Л.В., Томилова А.В.,
2014
© Северный (Арктический)
федеральный университет
им. М.В. Ломоносова, 2014

Оглавление

Введение	5
§ 1. Элементарная теория погрешностей	7
1.1. Абсолютная и относительная погрешности. Значащая цифра числа.....	8
1.2. Погрешности арифметических действий.....	10
1.2.1. Сложение и разность	10
1.2.2. Произведение	12
1.2.3. Частное	12
1.2.4. Степень и корень	13
1.2.5. Правила подсчета цифр	13
<i>Вопросы и задания</i>	16
§ 2. Численное решение уравнений	16
2.1. Отделение корней.....	17
2.1.1. Графический метод отделения корней	17
2.1.2. Аналитический метод отделения корней	19
2.2. Уточнение корней	20
2.2.1. Метод половинного деления (дихотомии, проб).....	20
2.2.2. Метод хорд (ложного положения, линейного интерпо- лирования, пропорциональных частей)	22
2.2.3. Метод касательных (Ньютона).....	27
2.2.4. Комбинированный метод хорд и касательных.....	31
2.2.5. Метод итераций (последовательных приближений)	35
<i>Вопросы и задания</i>	43
§ 3. Методы решения систем линейных уравнений	43
3.1. Точные методы решения	44
3.1.1. Метод Крамера	44
3.1.2. Решение систем линейных уравнений методом после- довательного исключения неизвестных. Метод Гаусса	44
3.1.3. Вычисление определителей с помощью схемы Гаусса	49
3.1.4. Обращение матрицы с помощью схемы Гаусса	50
3.2. Приближенные методы решения	53
3.2.1. Абсолютная величина и норма матрицы. Условия схо- димости итерационного процесса.....	54
3.2.2. Метод последовательных приближений (итераций)	57
3.2.3. Метод Зейделя. Условие сходимости процесса Зейделя	62
<i>Вопросы и задания</i>	65
§ 4. Интерполирование и экстраполирование	66
4.1. Интерполяционный многочлен Лагранжа	67
4.1.1. Интерполяционный многочлен Лагранжа с неравно- стоящими узлами интерполяции	68

4.1.2. Интерполяционный многочлен Лагранжа с равноотстоящими узлами интерполяции.....	72
4.2. Интерполяционные формулы Ньютона.....	74
4.2.1. Первая интерполяционная формула Ньютона для равноотстоящих узлов интерполяции	74
4.2.2. Вторая интерполяционная формула Ньютона	75
4.3. Интерполирование сплайнами	79
4.3.1. Линейный сплайн	79
4.3.2. Квадратичный сплайн.....	79
4.3.3. Кубический сплайн.....	81
<i>Вопросы и задания</i>	84
§ 5. Численное интегрирование и дифференцирование	85
5.1. Численное интегрирование.....	85
5.1.1. Метод прямоугольников	85
5.1.2. Метод трапеций	87
5.1.3. Метод парабол (Симпсона)	89
5.2. Численное дифференцирование.....	91
<i>Вопросы и задания</i>	95
§ 6. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений	95
6.1 Метод последовательных приближений (метод Пикара).....	97
6.2. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов	99
6.3. Метод Эйлера	100
6.4. Метод Рунге – Кутта.....	102
<i>Вопросы и задания</i>	106
§ 7. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных	106
7.1. Уравнение Лапласа.....	107
7.2. Уравнение теплопроводности.....	119
7.3. Уравнение колебания струны	120
<i>Вопросы и задания</i>	122
Варианты заданий для лабораторных работ	123
Список рекомендуемой литературы	162



Введение

Вычисления и измерения с давних времен играли важную роль в жизни человечества и со временем математические понятия и математические методы развивались. Математические методы стали применяться для сложных инженерных расчетов (атомные установки, запуск ракет и т.д.). Любое инженерное достижение не обходится без сложных математических расчетов.

Чем сложнее расчет, тем больше вычисления, и проводить их на бумаге вручную становится невозможным. Для упрощения человеческого труда стали появляться разного рода вычислительные машины (малые ЭВМ).

Наиболее эффективное применение вычислительная техника нашла при проведении трудоемких расчетов в научных и проектных работах. При решении задачи на ПК основная роль все-таки принадлежит человеку. Машина лишь выполняет его задания по разработанной программе.

Никакая вычислительная машина не может решить предложенную задачу, если для нее не задать программу вычислений. Даже при самой совершенной вычислительной технике главной частью работы является разработка математических методов решения задач.

Для решения этой проблемы разработаны численные методы решения задач. Численные методы – это методы, позволяющие получить в результате выполнения последовательности действий численный ответ. Раздел математики – теория численных методов – содержит описание и обоснование численных методов.

С помощью математического моделирования решение научно-технической задачи сводится к решению математической задачи, являющейся ее моделью.

Численный метод наряду с возможностью получения результата должен обладать еще одним важным качеством – не вносить в вычислительный процесс значительных погрешностей.

Классическими примерами моделей могут служить:

- определенный интеграл;
- модель формальных рассуждений: алгебра Буля;
- уравнение колебания маятника;
- уравнение теплообмена и другие примеры математической физики.

Появление в середине XX века ЭВМ расширило приложение математических методов в традиционных областях (физике, механике, технике) и вызвало проникновение математических методов в нетрадиционные области (в управление, экономику, химию, биологию, лингвистику, психологию).

Теория алгоритмов и моделей составляет предмет численных методов. Эта теория тесно связана с теорией приближения и интерполяции функций, производных с частными производными, интегральных уравнений и т.д.

Основные задачи численных методов:

- 1) типовые теории погрешности вычислений;
- 2) детальное описание теоретических основ методов вычислений;
- 3) теоретический анализ условий существования решений – сходимости методов.