О приближенномъ численномъ рѣшеніи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Докладъ **проф. А. Н. Крылова**, почетнаго члена Союза.

Читанъ 14 іюня 1917 года.

§ 1. При разработкѣ конструкцій нѣкоторыхъ судовыхъ устройствъ и механизмовъ приходится имѣть дѣло и съ такими вопросами динамики и теоріи сопротивленія матеріаловъ, которые требуютъ рѣшенія обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій.

При этомъ, по большей части нѣтъ надобности непремѣнно имѣть общій интегралъ уравненія съ входящими въ него буквенно произвольными постоянными, а достаточно найти частное рѣшеніе, удовлетворяющее даннымъ начальнымъ условіямъ, и при томъ, для ограниченнаго промежутка измѣняемости аргумента. Для практики нѣтъ также надобности въ аналитическомъ представленіи искомой функціи, а достаточно составить таблицу ея значеній или построить кривую, ее представляющую.

Пріемы такого численнаго рѣшенія диффер. ур-ній рѣдко излагаются въ курсахъ, особенно въ предназначенныхъ для инженеровъ, между тѣмъ по сути дѣла эти пріемы не сложнѣе столь привычнаго для морскихъ инженеровъ вычисленія опредѣленныхъ интеграловъ.

Въ настоящей замѣткѣ я и имѣю въ виду изложить наиболѣе удобные и общіе способы такого численнаго рѣшенія обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій.

§ 2. Конечно и здѣсь начало положено Эйлеромъ, который удѣляетъ VII главу I-го тома Institutiones Calculi Integralis изложенію способа приближеннаго численнаго рѣшенія диффер. ур-нія перваго порядка, къ которому всегда можно свести все дѣло.

Итакъ положимъ, что искомая функція y опредѣляется диффер ур-ніемъ

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

и начальными условіями: при $x = a$ должно быть $y = b$. Выбравъ достаточно малый промежутокъ h, можно принять, что пока x заключается между a и $a+h$, y мало отличается отъ b, и производная сохраняетъ постоянное значеніе $f(a,b)$, такъ что для этого промежутка будетъ:

$$y = b + (x - a) \,.\, f(a,b) = b + (x - a) \,.\, A_0$$

и слѣдовательно, для конца его, когда $x = a + h$, будетъ

$$y = b + A_0 \,.\, h = b_1.$$

Такимъ образомъ, мы получили приближенное значеніе $y = b_1$, соотвѣтствующее значенію $x = a_1 = a + h$.

Совершенно также, полагая

$$A_1 = f(a_1, b_1),$$

получимъ для $x = a_2 = a + 2h$ величину

$$y = b_2 = b_1 + A_1 \,.\, h$$

и т. д. Такимъ образомъ, составится такая таблица соотвѣтствующихъ значеній:

x	y	$y' = f(x, y)$
a	b	A_0
a_1	b_1	A_1
a_2	b_2	A_2
......	....	....
a_n	b_n	A_n

причемъ

$$A_k = f(a_k, b_k)$$

и

$$b_{k+1} = b_k + hA_k.$$

Изложивъ этотъ пріемъ, Эйлеръ говоритъ: „чѣмъ меньше промежутки между послѣдовательными значеніями x, тѣмъ точнѣе опредѣляются всѣ остальныя величины; тѣмъ не менѣе, вслѣдствіе большого числа, накопленіе и этихъ малыхъ погрѣшностей можетъ достигнуть значительной величины“.

„Погрѣшность при этомъ вычисленіи происходитъ отъ того, что на протяженіи каждаго отдѣльнаго промежутка обѣ перемѣнныя x и y принимаются сохраняющими свои постоянныя значенія, соотвѣтствующія началу этого промежутка, такъ что и значеніе функціи $f(x, y)$ остается постояннымъ; поэтому, чѣмъ быстрѣе значеніе этой функціи измѣняется при переходѣ отъ одного промежутка къ слѣдущему, тѣмъ бóльшую можно ожидать погрѣшность. Это невыгодное обстоятельство имѣетъ мѣсто обыкновенно тамъ, гдѣ значеніе $f(x, y)$ или уничтожается, или-же становится безконечнымъ“.

Чтобы устранить это „невыгодное обстоятельство“, Эйлеръ поступаетъ такъ: положимъ для простоты письма, что $f(x, y)$ обращается въ нуль при $x=a$, $y=b$; тогда надо положить

$$x=a+\xi, \quad y=b+\eta.$$

и наше уравненіе приметъ видъ

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f(a+\xi,\ b+\eta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

и начальное условіе будетъ: при $\xi=0$ должно быть $\eta=0$, вмѣстѣ съ тѣмъ при $\xi=0$ будетъ и $\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_0=f(a,b)=0$; поэтому, положивъ

$$\eta=\alpha_1\xi^{p_1}+\alpha_2\xi^{p_2}+\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

подставляемъ величину (3) въ уравненіе (2) и опредѣляемъ показатели p_1, p_2 . . . . и коэффиціенты α_1, α_2, ... такъ, чтобы уравненіе (2) имѣло мѣсто тождественно, иными словами, по извѣстному пріему разлагаемъ величину η въ рядъ по возрастающимъ степенямъ ξ.

Въ томъ случаѣ, когда $f(a,b)=\infty$, можно уравн. (1) писать въ видѣ:

$$\frac{d\xi}{d\eta}=\frac{1}{f(a+\xi,\ b+\eta)}=F(\xi,\eta);$$

функція $F(\xi, \eta)$ при $\xi=0$ и $\eta=0$ будетъ обращаться въ ноль, и значитъ, надо будетъ взять разложеніе вида:

$$\xi=\beta_1\eta^{q_1}+\beta_2\eta^{q_2}+\ldots\ldots$$

и найдя коэффиціенты β_1, β_2 . . . . . и показатели q_1, q_2 . . . , этотъ рядъ „обратить“, т. е. выразить η въ видѣ ряда, расположеннаго по степенямъ ξ.

Такъ, Эйлеръ беретъ такой примѣръ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a^2}{x^2-y^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

и при $x=a$ должно быть $y=a$.

Положивъ

$$x=a+\xi, \quad y=a+\eta,$$

получимъ

$$a^2\cdot\frac{d\xi}{d\eta}=2a(\xi-\eta)+(\xi^2-\eta^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (**)$$

дѣлая затѣмъ:

$$\xi=\alpha_1\eta^{p_1}+\alpha_2\eta^{p_2}+\ldots\ldots$$

имѣемъ

$$a^2\ [p_1\alpha_1\eta^{p_1-1}+p_2\alpha_2\eta^{p_2-1}+\ldots\ldots]=$$

$$=2a\,[-\eta+\alpha_1\eta^{p_1}+\alpha_2\eta^{p_2}+\ldots]+[\alpha_1^2\eta^{2p_1}+2\alpha_1\alpha_2\eta^{p_1+p_2}+\ldots]-\eta^2$$