УДК 531.36 DOI: 10.18698/2308-6033-2024-4-2347

К задаче анализа динамического поведения линейной механической системы при комплексном высокочастотном воздействии

© О.Н. Тушев, Е.К. Кондратьев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Российская Федерация

Рассмотрена задача анализа динамики линейной многомерной системы при воздействии на нее аддитивной и параметрической синусоидальных высокочастотных составляющих с некратными частотами. В соответствии с методом Н.Н. Боголюбова решение представлено в виде суперпозиции медленной и быстрой составляющих с частотами внешних воздействий; исследованы два приближения. Поскольку в целом внешнее воздействие из-за некратности частот является практически апериодическим, осреднение высокочастотных гармоник на периоде во втором приближении заменяется повторной сегрегацией движения на медленное и быстрое. Показано, что параметрическая составляющая вызывает повышение жесткости системы, что несколько трансформирует собственные частоты. В силу некратности частот в системе возникают низкочастотные колебания на комбинационной частоте, равной разнице частот аддитивной и параметрической составляющих. Таким образом, в системе возможны резонансные режимы. В случае равенства частот в решении появляется постоянная составляющая. Решение получено в аналитическом векторном виде, удобном для анализа. Результаты иллюстрируются примером.

Ключевые слова: *линейная система, параметрическое и аддитивное воздействия, медленное и быстрое движения, сегрегация, резонанс, постоянная составляющая*

Введение. Анализ динамики линейных механических систем при параметрическом и комбинированном параметрическом и аддитивном воздействиях является далеко не новой задачей, опубликованной достаточно широко в различных вариантах. Очень часто эта проблема рассматривается на основе наиболее простой модели в виде физического маятника с подвижным основанием или переменными параметрами.

С одной стороны, это связано с простотой системы, позволяющей применить наглядные аналитические методы решения, а с другой — с ее характерными динамическими свойствами, присущими в той или иной степени всем параметрически возбуждаемым системам. Как правило, математическое описание движения системы осуществляется с использованием уравнений типа уравнения Матье или уравнения Хилла. При этом с определенной степенью условности обозначились два направления исследований: первое — потеря устойчивости и динамика системы при «низкочастотных» воздействиях (параметрический резонанс); второе — динамические эффекты типа повышения устойчивости при «высокочастотных» вибрациях, следствием которых является вибрационный момент. Влияние момента заметно проявляется при достаточно высокочастотных вибрациях (по отношению к собственной частоте колебаний маятника).

Во многих работах по теории колебаний и динамике конструкций приведены разные задачи с параметрическими воздействиями; наиболее распространенный результат — диаграмма Айнса — Стретта, определяющая границы области неустойчивости для маятника при синусоидальном вертикальном воздействии [1]. Эта задача в [2–4] рассмотрена с более общих позиций.

Задачи анализа динамики линейных и нелинейных систем при наличии двух периодических и двух параметрических синусоидальных воздействий представлены в [5, 6]. Показано, что при этом могут возникать множественные параметрические резонансы на комбинационных частотах.

Противоположный эффект достигается, если вертикальная гармоническая вибрация является высокочастотной. Тогда положение «перевернутого» на 180° маятника, соответствующее максимальной потенциальной энергии, при определенных условиях становится устойчивым. Эту задачу впервые решил П.Л. Капица [7]. Фундаментальные результаты общего характера по повышению устойчивости механических систем при воздействии высокочастотной вибрации получены В.Н. Челомеем [8, 9] на основе асимптотических методов, разработанных Н.Н. Боголюбовым и развитых Ю.Л. Митропольским [10, 11]. Эти результаты распространены на многостепенной маятник [12, 13]. Трехстепенной маятник, убедительно подтверждающий их, исследован в [14].

Представляет самостоятельный интерес родственная задача анализа динамики маятника при высокочастотном перемещении точки подвеса под углом ϑ к вертикальному направлению: $0 < \vartheta < \pi/2$ («косая» вибрация). В результате действия вибрационного момента возникает отклонение («уход») маятника от вертикали. Практически этот эффект наблюдается, например, в виде ложного сигнала (погрешности) стрелочных приборов (стрелка-маятник) и вращения незатянутых гаек [10, 15].

Аналогичный результат в виде постоянной составляющей в решении, а также колебания на комбинационной частоте, как показано в настоящей статье, свойственны и линейным системам общего вида.

За исключением работы [16], результаты в перечисленных исследованиях (и не только в них) получены для гармонических или хотя бы периодических воздействий, которые могут быть разложены в ряд Фурье. Если они представляют собой полигармонику, то частоты ее элементов должны быть кратными. Это условие необходимо, поскольку для выделения медленной части используется осреднение решения на периоде быстрых колебаний. В данном случае в таком допущении нет необходимости.

Реальные объекты, находящиеся в динамических режимах, очень часто моделируются линейными моделями.

Цель настоящей работы — анализ влияния высокочастотных воздействий с некратными частотами на линейную механическую систему, а также определение эффектов, которые могут возникнуть в результате этого.

Решение задачи. Полагаем, что комплексное воздействие приложено к i-му элементу. Тогда считаем, что динамика системы определяется уравнением

$$M\ddot{X} + (C + \mu I_{ii} c_{ii} \cos p_1 t) X = I_i a \cos p_2 t,$$

или в другом виде,

$$\ddot{X} + R(E + B_i \cos p_1 t) X = F_i \cos p_2 t. \qquad (1)$$

Здесь M, C — симметричные и положительно определенные матрицы масс и жесткости; X — вектор обобщенных координат; μ — малый параметр; I_{ii}, I_i — квадратная матрица и вектор со всеми нулевыми элементами, за исключением элементов с номерами «ii» и «i», равными единице, которые названы в работе матричной и векторной единицами (их использование позволяет формально представить аддитивное и параметрическое воздействия в виде скалярных сомножителей, что существенно упрощает преобразования и отчетливо выявляет суть изучаемых явлений); c_{ii} — диагональный элемент матрицы C; p_1, p_2 — частоты внешнего воздействия; t — время; a — амплитуда аддитивного воздействия; $R = M^{-1}C$; E — единичная матрица; $B_i = \mu c_{ii} C^{-1} I_{ii}$; $F_i = M^{-1} I_i a$.

Заметим, что векторное уравнение (1) структурно полностью совпадает со скалярным линеаризованным уравнением для маятника с «косой» вибрацией точки подвеса [16], которое является уравнением Матье с аддитивным воздействием.

Считается, что $\omega_k << p_1, p_2$, где ω_k, $k = \overline{1, n}$ — собственные частоты системы.

Задавать начальные условия для уравнения (1) нет необходимости, поскольку общее решение определяет только переходные процессы, затухающие из-за диссипации энергии в реальных системах и не оказывающие влияния на эффекты, которые свойственны параметрически возбуждаемым системам.