Лазареву
отъ
ав

Théorie des vibrations des plaques élastiques.

PAR

A. Grousinzeff.

ТЕОРІЯ
КОЛЕБАНІЙ УПРУГИХЪ ПЛАСТИНОКЪ.

Поперечныя колебанія упругихъ пластинокъ.

А. П. Грузинцева.

ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія М. Зильберберґъ и С-вья.
(Рыбная улица, домъ № 30-й).
1909.

ŋddqɐeɎ bɆ dedɆbɎɜe d ecɑbcɏ Ɉqddɏqɐè

Теорія колебаній упругихъ пластинокъ.

А. П. Грузинцева.

Точную теорію колебаній пластинокъ далъ въ первый разъ Кирхгоффъ въ 1850 году въ своей работѣ „Ueber das Gleichgewicht und Bewegung einer elastischen Scheibe“. Онъ приложилъ свою теорію къ случаю круглой пластинки и далъ точную теорію поперечныхъ ея колебаній.

Что касается теоріи колебаній пластинокъ, ограниченныхъ прямолинейными контурами, напр. квадратныхъ или треугольныхъ пластинокъ, то точной ихъ теоріи не существуетъ; скажемъ болѣе, даже въ большихъ трактатахъ по акустикѣ, напр. въ „Theory of Sound“ лорда Ралэя приходится довольствоваться чисто эмпирическими формулами при объясненіи узловыхъ линій квадратныхъ пластинокъ. Причина этого лежитъ несомнѣнно въ трудностяхъ чисто математическихъ: трудно подъискать даже частныя рѣшенія дифференціальныхъ уравненій колебательныхъ движеній пластинки, которые удовлетворяли бы условіямъ на контурѣ. Если мы и рѣшились сообщить здѣсь свое рѣшеніе этой задачи, то только потому, чтобы обратить вниманіе математиковъ на этотъ вопросъ.

Нашему рѣшенію задачи о поперечныхъ колебаніяхъ квадратной пластинки мы предпослали изложеніе рѣшенія общей задачи о колебаніяхъ пластинокъ, которое въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ можетъ быть заслуживаетъ вниманія.

Колебанія пластинокъ.

Общія уравненія.

Пусть толщина плоской пластинки весьма мала и равна 2ε. Примемъ срединную плоскость за плоскость xy; а, слѣдовательно, нормаль къ пластинкѣ за ось z-овъ.

Положимъ, что проекціи перемѣщенія (ξ, η, ζ) какой-нибудь точки ея разложены по степенямъ z'а, а именно:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + z\xi_1 + \frac{z^2}{2}\xi_2 \\ \eta &= \eta_0 + z\eta_1 + \frac{z^2}{2}\eta_2 \\ \zeta &= \zeta_0 + z\zeta_1 + \frac{z^2}{2}\zeta_2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

Это будутъ *кинематическія условія* задачи; при чемъ (ξ_0, η_0, ζ_0) будутъ опредѣляемыми изъ уравненій движенія величинами, а $\xi_1, \ldots \zeta_2$, какъ и ξ_0, η_0, ζ_0 суть функціи x, y и t.

Кинетическими условіями задачи будутъ слѣдующія:

$$1)\ X_z = 0; \quad 2)\ Y_z = 0 \quad \text{и} \quad 3)\ Z_z = 0 \quad \text{для } z = \pm\varepsilon.$$

При этомъ, разумѣется, упругія силы X_z, Y_z, Z_z связаны съ деформаціями $\partial_1, \partial_2, \ldots \partial_6$ слѣдующими соотношеніями:

$$X_z = \mu\partial_5 = \mu\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right); \quad Y_z = \mu\partial_6 = \mu\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right);$$

$$Z_z = \lambda\Theta + 2\mu\partial_3, \quad \Theta = \partial_1 + \partial_2 + \partial_2; \quad \partial_4 = \frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x};$$

$$\partial_1 = \frac{\partial\xi}{\partial x}; \quad \partial_2 = \frac{\partial\eta}{\partial y}; \quad \partial_3 = \frac{\partial\zeta}{\partial z}.$$