

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

## **ПРОИНТЕГРИРОВАННЫЕ ПОЛУГРУППЫ**

Учебное пособие для вузов

Составители:  
В.В. Васильев,  
Л.В. Хливненко

Издательско-полиграфический центр  
Воронежского государственного университета  
2009

## Введение

Предлагаемое пособие основано на курсе, который в течение нескольких лет читался авторами на математическом факультете Воронежского государственного университета.

Хотя идейно (*по мнению авторов*) проинтегрированные полугруппы присутствуют еще в классической книге [Кре], но, видимо, следует считать, что оформление этого раздела математики в самостоятельное направление началось именно с работы [Аре], после которой в течение последних двадцати лет это направление находится в состоянии постоянного развития. Структура представленного курса соответствует авторскому видению вопроса, подробно разработанному в книге [Вас] для обычных  $C_0$ -полугрупп, которая, по замыслу авторов, является базовой для изучения настоящего курса. Этим обусловлено большое количество ссылок на [Вас]. Материал пособия сгруппирован в главы, состоящие из пунктов. Определения выделяются более крупным шрифтом. Формулировки утверждений набраны жирным шрифтом, замечания и комментарии – курсивом. Начало и конец логически связного текста (*чаще всего – доказательства*) выделены знаками ♣ и ♠. При проведении цепочек преобразований нередко вставляются комментарии, поясняющие выполняемые действия. В тексте используются символы  $\Pi$  (*предположим* *противное*) и  $\textcircled{?!}$  (*получили противоречие*).

В цепочках преобразований иногда по ходу добавлены курсивом пояснения и комментарии. Стил изложения, возможно, местами излишне подробен и содержит избыточную нумерацию, что оправдано для учебного пособия.

Авторы хотели бы выразить благодарность профессорам Tanaka, Sen Yen-Shao, Xiao, Zheng, любезно предоставившим свои работы для ознакомления и изучения, а также другим коллегам, чьи внимание и заинтересованность способствовали появлению этого пособия.

## 1. Проинтегрированные полугруппы (ПП). Алгебраический подход (АП)

**1.1.** Как мы видели ранее, теория полугрупп тесно связана с теорией абстрактных дифференциальных уравнений. В частности, как хорошо известно (*см., напр., главы 3–4 книги [Вас]*),  $C_0$ -полугруппы есть разрешающие семейства задач Коши (1.1.1), равномерно корректных на  $D(A)$ .

Теория проинтегрированных полугрупп с целым показателем, бурно развивающаяся два последние десятилетия, соответствует классу задач Коши, разрешимых на  $D(A^n)$  с натуральным  $n \geq 1$ .

**1.3. Пример 1.** [Мел114] Простейшим примером проинтегрированной полугруппы  $S(t)$  может служить  $n$ -кратный интеграл от обычной  $C_0$ -полугруппы:

$$S(t)x := \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{n-1}} U(s_n)x ds_n =: U^{(-n)}(t)x, \quad (1.3.1)$$

где  $U(t)$  есть  $C_0$ -полугруппа, а  $x$  – произвольный элемент  $E$ .

♣ Первые два свойства (1.2(i)–(1.2(ii))) проинтегрированной полугруппы очевидны. Проверим третье. Докажем свойство 1.2(iii) по индукции. Пусть  $n = 1$ . Возьмем произвольный элемент  $x \in E$ , и проинтегрируем полугрупповое тождество  $U(\xi_1)U(\xi_2)x = U(\xi_1 + \xi_2)x$  по  $\xi_1$  от 0 до  $t$  и по  $\xi_2$  от 0 до  $s$ :

$$\begin{aligned} S(t)S(s)x &= \int_0^t d\xi_1 \int_0^s d\xi_2 U(\xi_1 + \xi_2)x = \int_0^t d\xi_1 \int_{\xi_1}^{\xi_1+s} d\xi_2 U(\xi_2)x = \\ &= \int_0^t d\xi_1 (S(\xi_1 + s)x - S(\xi_1)x) = \int_s^{t+s} S(\xi)x d\xi - \int_0^t S(\xi)x d\xi. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Если теперь тождество (1.2.1) справедливо для  $n = k$ , и  $\tilde{S}(\cdot)$  – соответствующая  $k$ -ПП, то, обозначив  $S(t)x := \int_0^t \tilde{S}(\zeta)x d\zeta$ , аналогично получаем, что

$$\begin{aligned} S(t)S(s)x &= \\ &= \int_0^t d\xi_1 \int_0^s d\xi_2 \frac{1}{(k-1)!} \left[ \int_{\xi_1}^{\xi_1+\xi_2} (\xi_1 + \xi_2 - \tau)^{k-1} \tilde{S}(\tau)x d\tau - \int_0^{\xi_2} (\xi_1 + \xi_2 - \tau)^{k-1} \tilde{S}(\tau)x d\tau \right] = \end{aligned}$$

(делаем в первом интеграле замену  $\tau = \xi_1 + \alpha$ )

$$= \int_0^t d\xi_1 \int_0^s d\xi_2 \frac{1}{(k-1)!} \left[ \int_0^{\xi_2} (\xi_2 - \alpha)^{k-1} \tilde{S}(\xi_1 + \alpha)x d\alpha - \int_0^{\xi_2} (\xi_1 + \xi_2 - \tau)^{k-1} \tilde{S}(\tau)x d\tau \right] =$$

(в первом интеграле меняем порядок интегрирования, во втором интегрируем по  $\xi_1$ )

$$= \frac{1}{(k-1)!} \int_0^s d\alpha \int_\alpha^s (\xi_2 - \alpha)^{k-1} d\xi_2 \left( \int_0^t \tilde{S}(\xi_1 + \alpha)x d\xi_1 \right) -$$

$$-\frac{1}{k!} \int_0^s d\xi_2 \int_0^{\xi_2} (t + \xi_2 - \tau)^k \tilde{S}(\tau) x d\tau + \frac{1}{k!} \int_0^s d\xi_2 \int_0^{\xi_2} (\xi_2 - \tau)^k \tilde{S}(\tau) x d\tau =$$

(в первом интеграле переходим от  $\tilde{S}$  к  $S$  и интегрируем по  $\xi_2$ , во втором и третьем интегралах меняем порядок интегрирования)

$$= \frac{1}{k!} \int_0^s d\alpha (s - \alpha)^k (S(t + \alpha) - S(\alpha)) -$$

$$-\frac{1}{k!} \int_0^s \tilde{S}(\tau) x d\tau \int_{\tau}^s (t + \xi_2 - \tau)^k d\xi_2 + \frac{1}{k!} \int_0^s \tilde{S}(\tau) x d\tau \int_{\tau}^s (\xi_2 - \tau)^k d\xi_2 =$$

(во втором и третьем интегралах вычисляем внутренние интегралы)

$$= \frac{1}{k!} \left( \int_t^{t+s} d\alpha (t + s - \alpha)^k S(\tau) - \int_0^s d\tau (s - \tau)^k S(\tau) \right) -$$

$$- \frac{1}{(k+1)!} \int_0^s \tilde{S}(\tau) x d\tau \left( (t + s - \tau)^{k+1} - t^{k+1} + (s - \tau)^{k+1} \right) =$$

(интегрируем по частям)

$$= \frac{1}{k!} \int_t^{t+s} d\alpha (t + s - \alpha)^k S(\tau) - \int_0^s d\tau (s - \tau)^k S(\tau) + \frac{1}{k!} \int_0^s S(\tau) x d\tau \left( (t + s - \tau)^k + \underline{(s - \tau)^k} \right) =$$

(уничтожаем подчеркнутые противоположные слагаемые)

$$= \frac{1}{k!} \int_t^{t+s} (t + s - \alpha)^k S(\tau) d\tau + \frac{1}{k!} \int_0^s (t + s - \tau)^k S(\tau) x d\tau . \spadesuit$$

**Замечание 1.** И -ПП, заданная равенством (1.3.1), допускает представление в виде

$$S(t)x := \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{n-1}} U(s_n) x ds_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t - s_1)^{n-1} U(s_1) x ds_1 .$$

(1.3.1)

♣ Действительно, если  $S(t)$  определено как в (1.3.1), то, интегрируя по частям, получим, что

$$S(t)x := (s_1 - t) \int_0^{s_1} ds_2 \dots \left| \int_0^t (s_1 - t) ds_1 \left( \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{n-1}} U(s_n) x ds_n \right) \right|_{s_1} =$$

$$= \int_0^t (t - s_1) ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{n-1}} U(s_n) x ds_n =$$

(продолжаем интегрирование по частям)

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s_1)^{n-1} U(s_1) x ds_1. \spadesuit \quad (1.3.3)$$

**Замечание 2.** Как мы увидим позже, не любая  $n$ -ПП, представима в виде (1.3.1) как интеграл от сильно непрерывной полугруппы, определенной в пространстве  $E$ . Однако любая  $n$ -ПП имеет вид (1.3.1) в специальном образом подобранном банаховом пространстве. Поэтому пример 1 можно считать в определенном смысле универсальным.

**Следствие.** Если  $U(t)$  есть  $C_0$ -полугруппа, то интеграл Римана – Лиувилля

$$S_\alpha(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-s)^\alpha U(s) x ds =: U^{(-\alpha)}(t)x \quad (1.3.4)$$

при  $\alpha > -1$  есть  $\alpha$ -ПП.

Отметим, что при целых  $\alpha$  формула (1.3.4) совпадает с (1.3.1).

♣ Поскольку  $\Gamma(n+1) = n!$ , утверждение легко получается, если проинтегрировать тождество

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)^2} (t-z)^\alpha U(z) (s-\xi)^\alpha U(\xi) x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)^2} (t-z)^\alpha (s-\xi)^\alpha U(z+\xi) x \quad (1.3.5)$$

по  $z$  от 0 до  $t$  и по  $\xi$  от 0 до  $s$ , и повторить преобразования (1.3.3).

Действительно, проделывая это интегрирование, получим, что

$$S_\alpha(t) S_\alpha(s) x = \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^t (t-z)^\alpha dz \int_0^s (s-\xi)^\alpha U(z+\xi) x d\xi =$$

(во внутреннем интеграле делаем замену переменной  $\xi = \tau - z$ )

$$= \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^t (t-z)^\alpha dz \int_z^{z+s} (z+s-\tau)^\alpha U(\tau) x d\tau =$$

(представляем внутренний интеграл как разность  $\left( \int_0^{z+s} - \int_0^z \right) (\dots)$  и пользуемся (1.3.4))

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-z)^\alpha S_\alpha(z+s) x dz - \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^t (t-z)^\alpha dz \int_0^z (z+s-\tau)^\alpha U(\tau) x d\tau =$$

(в первом интеграле делаем замену переменной  $z+s = \gamma$ , а второй обозначаем через  $\Omega_2$ )