МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Т. К. Кацаран,
Л. Н. Строева

НАХОЖДЕНИЕ ТОЧКИ БИФУРКАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ
(лабораторная работа)

Методическое пособие для студентов вузов

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2011

В настоящей работе исследуются системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами вида

$$\frac{dx}{dt} = \big(A + \varepsilon B(t)\big)x,$$

где ε – малый параметр, т.е. системы, мало отличающиеся от систем с постоянными коэффициентами. Здесь $x \in R^n$, A – постоянная матрица, $B(t)$ – интегрируемая на каждом конечном промежутке вещественной прямой матрица-функция, $B(t+T) = B(t)$, $t \in R$, $T > 0$. Системы такого вида принято называть слабовозмущенными.

Известно, что матрицант системы $X(t, \varepsilon)$ при любом фиксированном t является аналитической функцией параметра ε в промежутке $|\varepsilon| < r_0$.

Многие задачи современной техники приводят к исследованию систем указанного вида. Для этих систем требуется определить порядок роста или убывания решений, выделить области устойчивости или неустойчивости системы на плоскости или прямой параметров. Часто «невозмущенная» система для $\varepsilon = 0$ является устойчивой, но не асимптотически, при этом возмущенная система может быть неустойчивой даже при сколь угодно малых ε.

Эти задачи сводятся к вычислению характеристических показателей (или мультипликаторов системы) при малых ε.

В настоящей работе применяется прямой метод для исследования таких систем. Он сводится к численному нахождению мультипликаторов системы и исследованию их зависимости от ε.

ђqdqyeY pɆ dedɆbYɜe d eaɑbɔy ɟqdqYqyè

$$
\begin{aligned}
&x_1^{(\sigma)} = e^{\alpha(\sigma)t} f_1^{(\sigma)}(t);\\
&x_2^{(\sigma)} = e^{\alpha(\sigma)t}[tf_1^{(\sigma)}(t) + f_2^{(\sigma)}(t)];\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (9)\\
&x_{m_\sigma}^{(\sigma)} = e^{\alpha(\sigma)t}[\frac{1}{(m_\sigma - 1)!} t^{m_\sigma - 1} f_1^{(\sigma)}(t) + \ldots + f_{m_\sigma}^{(\sigma)}(t)];\\
&(\sigma = 1,\ \ldots,\ s;\ m_1 + \ldots + m_s = n),
\end{aligned}
$$

где $f_n^{(\sigma)}(t)$ – T-периодические вектор-функции с кусочно-непрерывной интегрируемой производной. Каждая группа решений соответствует элементарному делителю $(\lambda - \alpha(\sigma))^{m_\sigma}$ матрицы *K*.

Собственные значения матрицы *K* называются характеристическими показателями системы (1). Каждому характеристическому показателю α соответствует одно или несколько решений системы (1) вида

$$x(t) = e^{\alpha t} f(t), \qquad (10)$$

где $f(t)$ – T-периодическая векторная функция. Обратно, если найдено решение вида (10), то α – характеристический показатель. Причем для каждого мультипликатора ρ системы (1) можно указать множество характеристических показателей α, таких, что $\rho = e^{\alpha T}$.

Из последнего равенства получаем следующую формулу связи между характеристическими показателями и мультипликаторами T-периодической линейной системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{1}{T}\ln\rho = \alpha + 2\pi i m, \quad m \in Z\,.$$

На основании вышеизложенных фактов о структуре решений системы (1) и общих теорем об устойчивости линейных систем сформулированы следующие теоремы об устойчивости системы (1) в терминах характеристических показателей и мультипликаторов.

Предположим, что элементы матрицы *A(t)* представляют собой кусочно-непрерывные, интегрируемые на каждом конечном интервале вещественной оси функции. Это гарантирует существование, единственность и продолжимость решения задачи Коши $x(t_0) = x_0$ при всех $t \ge t_0$.

Теорема 1. При сделанных предположениях относительно матрицы *A(t)* система (1) устойчива тогда и только тогда, когда вещественные части всех ее характеристических показателей не положительны, причем в случае чисто мнимых или нулевых характеристических показателей максимальная из размерностей соответствующих им клеток Жордана матрицы *K* должна быть равна 1.

Следствие. Система (1) неустойчива тогда и только тогда, когда существует характеристический показатель системы с положительной вещественной частью или характеристический показатель, вещественная часть которого равна 0, а размерность соответствующей ему клетки Жордана матрицы K больше 1.

Теорема 2. При сделанных ранее предположениях относительно матрицы $A(t)$ система (1) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда вещественные части всех ее характеристических показателей отрицательны.

Теорема 3. При сделанных выше предположениях относительно матрицы $A(t)$ система (1) устойчива тогда и только тогда, когда все ее мультипликаторы лежат внутри или на границе круга, радиус которого равен единицы на комплексной плоскости, причем, если мультипликаторы лежат на границе этого круга, максимальная размерность соответствующих им клеток Жордана матрицы монодромии должна быть равна единице.

Теорема 4. При сделанных ранее предположениях относительно матрицы $A(t)$ система (1) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда ее мультипликаторы лежат внутри круга радиусом единица на комплексной плоскости.

Теорема 5. Линейная T-периодическая система (1) с кусочно-непрерывной, интегрируемой на каждом конечном промежутке вещественной прямой матрицей-функцией $A(t)$ имеет T-периодическое решение тогда и только тогда, когда по крайней мере один из его мультипликаторов равен единице; она имеет $2T$-периодическое решение тогда и только тогда, когда существует мультипликатор, равный (-1).

Таким образом, задача исследования устойчивости линейной T-периодической системы сводится к построению матрицы монодромии и нахождению ее мультипликаторов.

2. Постановка задачи

Приведенные здесь теоретические сведения являются предисловием к постановке следующей задачи: рассматривается слабовозмущенная T-периодическая система:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \varepsilon(b_{11}(t)x_1 + b_{12}(t)x_2), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \varepsilon(b_{21}(t)x_1 + b_{22}(t)x_2), \end{cases} \tag{11}$$

где $a_{11} + a_{22} < 0,\ a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} > 0,\ a_{ij} \in R,\ i, j \in \{1, 2\}.$ (12)

Функции $b_{ij}(t)$, $i, j \in \{1, 2\}$ предполагаются кусочно-непрерывными, интегрируемыми на каждом конечном промежутке вещественной прямой, T-периодическими.

Условия (12) гарантируют асимптотическую устойчивость системы при $\varepsilon = 0$. При малых изменениях параметра ε система (1) сохраняет устойчивость, при дальнейшем возрастании $|\varepsilon|$ наиболее вероятен переход системы в неустойчивое состояние. Если $a_{11} + a_{22} > 0$, что гарантирует положительность одного или обоих собственных значений матрицы $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$, а в случае комплексно-сопряженных собственных значений положительность их вещественных частей, система (11) неустойчива. Более подробно: существуют такие значения $\varepsilon_1 < 0$, $\varepsilon_2 > 0, \delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, что при $\varepsilon \in (\varepsilon_1 - \delta_1, \varepsilon_1) \cup (\varepsilon_2, \varepsilon_2 + \delta_2)$ система (11) неустойчива (устойчива), а при $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \delta_1) \cup (\varepsilon_2 - \delta_2, \varepsilon_2)$ эта система устойчива (неустойчива). Эти значения $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ называются, как правило, точками бифуркации системы.

Задача состоит в том, чтобы найти минимальные значения $|\varepsilon|$ ($\varepsilon_1 < 0, \varepsilon_2 > 0$), при которых происходит переход системы из устойчивого состояния в неустойчивое или наоборот, и исследовать поведение решений системы в окрестности точек бифуркации.

Конкретнее, решение поставленной задачи состоит из следующих этапов:

а) для данной T-периодической системы линейных дифференциальных уравнений исследовать наличие точек бифуркации при $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$;

б) построить графики зависимости от ε модулей мультипликаторов на промежутке $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$;

в) найти минимальные по модулю точки бифуркации системы (11): $\varepsilon_1 < 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $|\varepsilon_k| < \varepsilon_0$, $k = 1, 2$.

Обозначим $\rho_k(\varepsilon)$ за мультипликатор системы (11), удовлетворяющий условиям

$$|\rho_k(\varepsilon_k - \delta)| < 1, \quad |\rho_k(\varepsilon_k + \delta)| > 1$$

или условиям

$$|\rho_k(\varepsilon_k - \delta)| > 1, \quad |\rho_k(\varepsilon_k + \delta)| < 1,$$

где $k = 1, 2$, $0 < \delta << 1$. Через $\vec{a}_k(\varepsilon)$ обозначим соответствующий ему нормированный собственный вектор матрицы монодромии;

г) построить графики решений $x_{\pm}^k(t)$ исследуемой системы, удовлетворяющие начальным условиям

$$x_{\pm}^k(0) = \vec{a}_k(\varepsilon_k \pm \delta), \; k = 1, 2, \; 0 < \delta << 1 \qquad (13)$$

на промежутке $t \in [0, 2T]$;

д) в заключение ответить на следующие вопросы:

– является ли система (11) при $\varepsilon = 0$ асимптотически устойчивой или экспоненциально неустойчивой?