стороны, затем перейдем к другим определениям, позволяющим преодолеть указанные недостатки.

Классическое определение вероятности события. Вероятностью события A называется отношение:

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где m – число благоприятствующих случаев (исходов), а n – число всех возможных случаев (исходов), образующих полную группу равновозможных, несовместных, случайных событий.

Если какому-либо событию благоприятствуют все n случаев, образующих полную группу равновозможных, несовместных, случайных событий, то оно является достоверным ($p = 1$). Событие, которому не благоприятствует ни один из n случаев, является невозможным ($p = 0$).

Следовательно, $0 \le P(A) \le 1$.

Задача. В корзине 8 красных и 12 белых шаров, наудачу извлекают один шар. Какова вероятность того, что он красный? Какова вероятность того, что он белый?

Испытание: извлечение шара из корзины.

Событие A: появление шара красного цвета.

Событие B: появление шара белого цвета.

События A и B – противоположные в данном испытании.

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5};\ P(B)=1-P(A)=\frac{3}{5}.$$

Задача. Из колоды в 56 карт вынимается одна карта. Какова вероятность того, что она пиковой масти?

Испытание: извлечение карты из колоды.

Событие A: появление пиковой масти.

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}.$$

Задача. Одновременно подбрасывают две монеты. Какова вероятность выпадения герба на обеих монетах сразу?

Испытание: подбрасывание монет (одновременно).

Событие A: появление герба на двух монетах сразу.

Составим схему возможных случаев:

Первая монета	Вторая монета
герб	герб
герб	цифра
цифра	герб
цифра	цифра

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{4}.$$

Ограниченность классического определения вероятности

Классическая формула вероятности события применяется для непосредственного подсчета вероятностей тогда, когда задача сводится к «схеме случаев». Другими словами, классическое определение предполагает, что число элементарных исходов испытания конечно. На практике же часто встречаются испытания, число возможных исходов которых бесконечно, то есть далеко не всякий опыт может быть сведен к «схеме случаев».

Следовательно, существует класс событий, вероятности которых нельзя вычислить по классической формуле. Например, бросается несимметричная игральная кость. Какова вероятность выпадения нужной грани?

Часто так же невозможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных исходов или указать основания, позволяющие считать элементарные события равновозможными.

Указанные недостатки могут быть преодолены введением геометрической и статистической вероятностей.

Геометрические вероятности

Геометрической вероятностью называют вероятность попадания наудачу брошенной точки в область (отрезок, часть плоскости, часть пространства).

Пусть отрезок l составляет часть отрезка L. На отрезок L наудачу поставлена точка. Вероятность попадания точки на отрезок l пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L:

$$P=\frac{\text{длина } l}{\text{длина } L}.$$

Пусть плоская фигура g составляет часть плоской фигуры G. На G наудачу брошена точка. Вероятность попадания брошенной точки на g пропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от ее расположения относительно G, ни от формы g:

$$P=\frac{\text{площадь } g}{\text{площадь } G}.$$

По аналогии через отношение объемов определяется вероятность попадания наудачу брошенной точки в часть пространства.

Задача. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу, попадет в кольцо, образованное двумя окружностями с радиусами 5 и 10 см.

Площадь кольца (фигура g): $S_g=\pi\left(10^2-5^2\right)=75\pi$

$$S_G=\pi\cdot 10^2=100\pi;\ P=\frac{75\pi}{100\pi}=0{,}75.$$

Статистическая вероятность события

Введем еще одну количественную оценку возможности появления события в данном испытании, корнями уходящую в опыт, эксперимент.

Относительной частотой наступления события A называется отношение:

$$W(A)=\frac{m}{n},$$

где n – число проведенных опытов (испытаний), а m – число испытаний, в которых событие A наступило.

Заметим, что классическая формула не требует проведения испытаний в действительности, $P(A)$ вычисляется до опыта. Для нахождения относительной частоты испытания должны быть проведены либо возможно их проведение, $W(A)$ вычисляют после опыта.

При небольшом числе опытов W носит случайный характер и может изменяться. Например, при 10 бросаниях монеты герб может появиться 2 раза, а может 8 раз.

Но при увеличении числа опытов частота утрачивает случайный характер, случайные причины, влияющие на результат каждого отдельного опыта, взаимно «гасят» друг друга и W приближается к некоторой средней, постоянной величине.

Если в одинаковых условиях производят серии опытов и в каждой серии число испытаний довольно велико, то W обнаруживает свойство устойчивости. В таком случае W или близкое к ней число принимают за статистическую вероятность события.

Все свойства вероятности, вытекающие из классического определения, распространяются и на статистическое определение вероятности события.

Для существования статистической вероятности события требуется:

1) возможность, хотя бы принципиальная, производить неограниченное число испытаний, в каждом из которых событие A наступает или нет;

2) устойчивость относительных частот в различных сериях из достаточно большого числа испытаний.

Например, по данным шведской статистики, приводится относительная частота рождения девочек по месяцам года: 0,486; 0,489; 0,490; 0,471; 0,478; 0,482; 0,462; 0,484; 0,485; 0,491; 0,482; 0,473.

Значение относительной частоты колеблется около числа 0,482, его можно принять за статистическую вероятность рождения девочки. Статистические данные других стран дают примерно те же значения W и ту же статистическую вероятность.

Рассмотрим другой пример:

Число бросаний монеты	Число появлений герба	W
4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Данные таблицы показывают, как с увеличением числа испытаний «уточняется» значение относительной частоты.

Недостатком статистического определения является неоднозначность выбора значения относительной частоты при возникновении свойства устойчивости.

При практическом применении вероятностных методов исследования необходимо понимать, принадлежит ли исследуемое случайное явление к категории массовых, для которых выполняется свойство устойчивости частоты и понятие вероятность имеет глубокий практический смысл.

Между относительной частотой события и классической вероятностью существует глубокая, органичная связь. Получая вероятность некоторого события, мы не можем придать этому числу иной реальный, практический смысл, чем относительная частота появления данного события при большом числе опытов.

Основные теоремы теории вероятностей

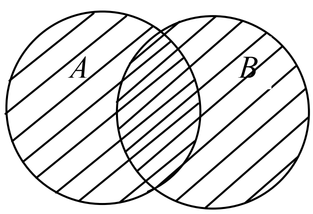
В большинстве практических задач для определения вероятностей событий применяются косвенные методы, позволяющие по известным вероятностям одних событий определять вероятности других. Кроме того, результаты многих испытаний являются сложными, применение классической формулы сразу не представляется возможным, хотя задача и сводится к «схеме случаев».

Применение косвенных методов связано с использованием основных теорем теории вероятностей: теоремы сложения вероятностей и теоремы умножения вероятностей.

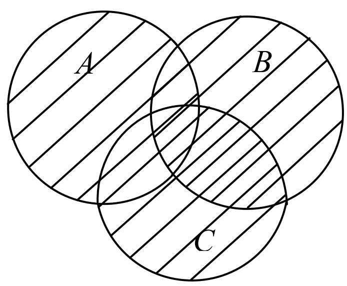
Но вначале необходимо введение символических операций над событиями.

Суммой двух событий A и B называется новое событие C, состоящее в появлении или события A, или события B, или событий A и B одновременно.

Суммой нескольких событий называется новое событие, состоящее в появлении хотя бы одного из исходных событий.



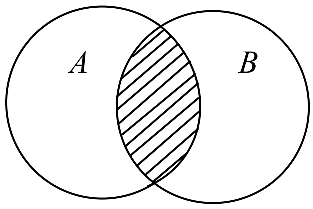
$A + B$
$A \cup B$



$A + B + C$
$A \cup B \cup C$

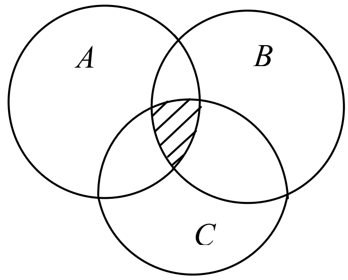
Произведением (совмещением) двух событий A и B называют новое событие C, состоящее в совместном появлении события A и события B одновременно.

Произведением нескольких событий называют новое событие, состоящее в одновременном появлении всех исходных событий.



$A \cdot B$

$A \cap B$



$A \cdot B \cdot C$

$A \cap B \cap C$

Теорема (о сложении вероятностей несовместных событий).

Пусть события A и B несовместны в данном испытании (явлении, опыте), причем вероятности этих событий известны.

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Формула из теоремы справедлива для любого числа попарно несовместных слагаемых:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Задача. Производится стрельба по области D, состоящей из трех непересекающихся областей (зон). Известны вероятности попадания в каждую зону $P(A_1) = \frac{5}{100}$, $P(A_2) = \frac{10}{100}$, $P(A_3) = \frac{17}{100}$. Найти вероятность попадания в область D.

Событие A – попадание в область D.

$A = A_1 + A_2 + A_3$ (где A_1, A_2, A_3 попарно несовместны)

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{5}{100} + \frac{10}{100} + \frac{17}{100} = \frac{32}{100}.$$

Следствие. Если случайные события $A_1, A_2, \ldots A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то справедливо равенство:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Случайные события A и B называются совместными, если в данном испытании могут наступить оба этих события, т.е. произойдет совмещение событий A и B.

Событие, заключающееся в совмещении событий A и B, будем обозначать (A и B) или (AB).