МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Курс лекций
Часть 3

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2015

Оглавление

Глава 1.

Нерелятивистская теория спина

1.1. Собственный механический момент электрона (спин)

В 1921 г. Штерн и Герлах наблюдали квантование магнитного момента атомов, пропуская атомные пучки через неоднородное магнитное поле. В частности, было обнаружено симметричное расщепление пучка атомов водорода, заведомо находящихся в s-состоянии. В s-состоянии механический, а вместе с ним и магнитный орбитальный моменты равны нулю. Между тем, факт симметричного расщепления пучка атомов в магнитном поле на две компоненты показывает, *что атомы обладают магнитным моментом и в s-состояниях*, а проекция этого момента на выделенное направление (ось квантования) может принимать только *два значения*, различающиеся знаком. Результаты измерений показывают, что абсолютная величина такого магнитного момента равна магнетону Бора μ_B. Таким образом, в s-состоянии атома с одним электроном существует магнитный момент $\boldsymbol{\mu}$, проекция которого на направление магнитного поля принимает лишь два значения: $\mu = \pm\mu_B$.

Подобно тому, как существование орбитального магнитного момента электрона объясняется наличием орбитального механического момента, естественным является и предположение о наличии у электрона собственного механического момента, не связанного с орбитальным движением. Обозначим его $\boldsymbol{s}$, а соответствующее квантовое число s. Если бы его проекция s_z определялась в соответствии с теорией орбитального момента целым числом постоянных Планка ($s_z = m_s\hbar$), то следовало бы ожидать по крайней мере трех ориентаций спина ($m_s = 0, \pm 1$), а не двух, как в опыте Штерна – Герлаха. Данный парадокс привел в 1925 г. Уленбека и Гаудсмита к *гипотезе о полуцелых значениях проекции спина $m_s = \pm\frac{1}{2}$*. Поэтому следует считать, что квадрату собственного момента соответствует квантовое число $s = \frac{1}{2}$ (оно является аналогом орбитального квантового числа l). Удивительным оставалось то, что гиромагнитное отношение для собственных механического и магнитного моментов электрона оказывается вдвое больше гиромагнитного отношения для орбитального движения:

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{mc}\,\boldsymbol{s},} \tag{1.1}$$

где $m \equiv m_e$ — масса электрона [1]. Такое же необычное отношение магнитного $\boldsymbol{M}$ и механического $\boldsymbol{L}$ моментов ферромагнитного образца было получено еще в 1915 г. в эксперименте Эйнштейна – де Гааза.

Если предположить, что электрон представляет собой равномерно заряженный шарик с радиусом $r_0 = e^2/(mc^2) = 2{,}818 \cdot 10^{-15}$ м («классический радиус электрона»), то для создания магнитного момента μ_B вращением точки на «экваторе» должны двигаться со сверхсветовой скоростью $342{,}5c$! Поэтому для объяснения природы собственного механического момента электрона необходимо *отказаться от классической интерпретации на основе вращения электрона вокруг собственной оси.* Наличие спина следует считать объективной реальностью, свойственной самому электрону как элементарной частице. Собственный механический момент, не связанный с орбитальным движением, принято называть *спином* [2]. Таким образом, кроме трех пространственных, электрон обладает одной дополнительной степенью свободы — спиновой. Спин — типично квантовая характеристика, исчезающая в классическом пределе (при $\hbar \to 0$), в то время как орбитальный момент всегда можно сделать сколь угодно большим, увеличивая соответствующее квантовое число l. Ниже мы покажем, что в последовательной релятивистской квантовой теории наличие у электрона спина является естественным следствием уравнения Дирака.

Впоследствии спин был открыт и у многих других элементарных частиц. Оказалось, проекция спина на выделенное направление не обязана принимать значения $\pm\frac{\hbar}{2}$ для всех частиц. Такое значение наблюдается для лептонов и нуклонов. У некоторых элементарных частиц, а также для высоковозбужденных состояний атомных ядер, наблюдаются более высокие полуцелые значения m_s (например, для Ω-гиперона $s = \frac{3}{2}$ и соответственно $m_s = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$). Для заряженных π-мезонов $s = m_s = 0$. У фотонов спин $s = 1$ и $m_s = \pm 1$ (отсутствие проекции с $m_s = 0$ связано с нулевой массой фотона).

1.2. Оператор спина и матрицы Паули

Рассмотрим теперь, как описывается спин электрона в нерелятивистской квантовой теории. В соответствии с общими принципами

[1] Ниже везде под e понимается *физический заряд электрона*, т. е. $e < 0$.

[2] От англ. spin — веретено.

ŋ̧qdqʎǝʎ bɆ dǝdƎqʎɜǝ d ɐɔɐqɔʎ ɟqdqʎqɐʎè

квантовой теории, спину любой квантовой частицы должен соответствовать векторный линейный эрмитов оператор $\hat{\boldsymbol{s}}$: $\hat{\boldsymbol{s}}^\dagger = \hat{\boldsymbol{s}}$. Обозначим его декартовы компоненты (операторы проекций спина) $\hat{s}_x$, $\hat{s}_y$, $\hat{s}_z$. Для операторов $\hat{s}_i$ $(i = x, y, z)$ *постулируется*, что они подчиняются тем же коммутационным соотношениям, что и операторы проекций орбитального момента $\hat{l}_x$, $\hat{l}_y$, $\hat{l}_z$:

$$[\hat{s}_k, \hat{s}_l] = \mathrm{i}\hbar \sum_m \varepsilon_{klm} \hat{s}_m, \qquad k, l, m = x, y, z, \tag{1.2}$$

где ε_{klm} — символ Леви – Чивита (см. [3] из списка основной литературы, приложение Б). Эти соотношения — *основной постулат спинового формализма*, позволяющий, в частности, установить явный вид операторов $\hat{s}_i$ для конкретных значений спинового квантового числа s. Поскольку наличие спина не связано с орбитальным движением, подчеркнем, что на языке теории представлений речь может идти только о *матричном представлении* этих операторов. Размерность матриц равна $(2s + 1) \times (2s + 1)$ и определяется значением s.

В соответствии с гипотезой Уленбека и Гаудсмита для электрона $s = 1/2$, а проекция спина на любое направление может принимать только два значения: $\pm\hbar/2$. Всякий оператор диагонален в своем собственном представлении, поэтому количество собственных значений операторов $\hat{s}_i$ (два) определяет размерность матричного представления этих операторов: 2×2. Операторы проекций спина электрона удобно представить в виде:

$$\hat{s}_i = \frac{\hbar}{2}\,\hat{\sigma}_i, \tag{1.3}$$

где $\{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_x\}$ называются *матрицами* (или *операторами) Паули* (размерности 2×2) и имеют собственные значения ± 1. Они составляют векторный оператор $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, так что $\hat{\boldsymbol{s}} = \frac{\hbar}{2}\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}$. В соответствии с (1.2), (1.3) матрицы Паули подчиняются перестановочным соотношениям:

$$\boxed{[\hat{\sigma}_k, \hat{\sigma}_l] = 2\mathrm{i} \sum_m \varepsilon_{klm} \hat{\sigma}_m, \qquad k, l, m = x, y, z.} \tag{1.4}$$

Основные свойства матриц $\hat{\sigma}_i$ (а с ними и операторов $\hat{s}_i$) можно установить на основе лишь коммутационных соотношений, не используя конкретного матричного представления. Поскольку собственные значения $\hat{\sigma}_i$ равны ± 1, квадрат $\hat{\sigma}_i$ в своем собственном представлении есть единичная двумерная матрица (или единичный двумерный оператор $\hat{1}$). А поскольку единичный оператор остается таковым в любом представлении, ясно, что справедливы следующие общие соотношения: