

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова  
Кафедра дискретного анализа

**В. Б. Калинин**

# Линейная алгебра

*Методические указания*

*Рекомендовано*  
*Научно-методическим советом университета для студентов,*  
*обучающихся по специальности Прикладная математика*  
*в экономике*

Ярославль 2011

УДК 512  
ББК В 143я73  
К 17

*Рекомендовано*  
*Редакционно-издательским советом университета*  
*в качестве учебного издания. План 2010/2011 учебного года*

Рецензент  
кафедра дискретного анализа  
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

**Калинин, В. Б. Линейная алгебра:** методические  
К 17 указания / В. Б. Калинин; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2011. – 52 с.

Методические указания содержат набор задач по следующим темам: линейные пространства, билинейные и квадратичные формы, линейные операторы. Типовые задачи приведены с решениями, это позволит более эффективно использовать различные формы самостоятельной работы и поможет студентам хорошо подготовиться к зачету и экзамену.

Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 080801.65 Прикладная математика в экономике (дисциплина «Линейная алгебра», блок ЕН), очной формы обучения.

УДК 512  
ББК В 143я73

© Ярославский государственный  
университет им. П. Г. Демидова,  
2011

## Плоскость и прямая в пространстве

1. Дана точка  $A(3, 5, 7)$ .

1) составить уравнения плоскостей, проходящих через точку  $A$  и параллельных координатным плоскостям;

2) составить уравнения прямых, проходящих через точку  $A$  и параллельных осям координат;

3) составить уравнения плоскостей, проходящих через точку  $A$  и через оси координат;

4) составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A$  и начало координат. Система координат аффинная.

2. В пространстве дана прямая  $x/2 = y/3 = z/5$ . Найти направляющий вектор этой прямой. Система координат аффинная.

3. Составить уравнение прямой, отсекающей на осях  $Ox$  и  $Oy$  отрезки, соответственно равные 2 и 3. Написать уравнение плоскости, проходящей через эту прямую и параллельной оси  $Oz$ . Система координат аффинная.

4. Даны точки пересечения прямой с двумя координатными плоскостями  $(0, y_1, z_1), (0, y_2, z_2)$ . Вычислить координаты точки пересечения этой же прямой с третьей координатной плоскостью. Система координат аффинная.

5. Найти ортогональные проекции прямой  $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$  на координатные плоскости  $Oxy, Oyz, Oxz$ . Система координат прямоугольная.

6. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $(1, 2, 3)$ , параллельной прямой  $x=y=z$  и отсекающей на осях  $Ox$  и  $Oy$  равные отрезки. Система координат аффинная.

*Решение.* Поскольку плоскость параллельна прямой  $x=y=z$ , один направляющий вектор уже есть. Это вектор  $(1, 1, 1)$ . А так как плоскости принадлежит вектор, отсекающий на  $Ox$  и  $Oy$  равные отрезки, вторым направляющим вектором будет, очевидно,  $(-t, t, 0)$ . Сократив на  $t$ , получим  $(-1, 1, 0)$ . Параметрическое уравнение плоскости будет иметь вид:

$$X = 1 + u - v$$

$$Y = 2 + u + v$$

$$Z = 3 + u.$$

Исключив  $t$  и  $u$ , получим искомый ответ:  $x + y - 2z + 3 = 0$ .

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось  $Oy$  и равноудаленной от точек  $(2, 7, 3)$  и  $(-1, 1, 0)$ .

Система координат аффинная.

8. Даны вершины тетраэдра:  $A = (2, 1, 0)$ ,  $B = (1, 3, 5)$ ,  $C = (6, 3, 4)$ ,  $D = (0, -7, 8)$ . Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую  $AB$  и равноудаленной от вершин  $C$  и  $D$ .

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$x = 2 + 3t, y = -1 + 6t, z = 4t \text{ и коллинеарной прямой}$$

$$x = -1 + 2t, y = 3t, z = -t. \text{ Система координат аффинная.}$$

10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $(-2, 3, 0)$  и через прямую  $x = 1, y = 2 + t, z = 2 - t$ .

11. Показать, что прямые  $x = 1 + 2t, y = 2t, z = t$  и  $x = 11 + 8t, y = 6 + 4t, z = 2 + t$  пересекаются и написать уравнение биссектрисы тупого угла между ними. Система координат прямоугольная.

12. Составить уравнение проекции прямой  $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$  из точки  $(1, 2, 1)$  на плоскость  $y - 2z + 4 = 0$ . Система координат аффинная.

13. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы плоскость  $Ax + By + Cz + D = 0$  : 1) пересекала ось  $Oz$ ; 2) была параллельна ей; 3) проходила через ось  $Oz$ . Система координат аффинная.

14. Установить в каждом из следующих случаев, лежит ли данная прямая в данной плоскости, параллельна плоскости или пересекает ее; в последнем случае найти точку пересечения прямой и плоскости

п р я м а я	п л о с к о с т ь
$\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$	$3x + 5y - z - 2 = 0$
$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$	$3x - 3y + 2z - 5 = 0$
$\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3} + 1 = 0$	$x + 2y - 4z$
$\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$	$3x - y + 2z - 5 = 0$

15. Установить в каждом из следующих случаев, лежит ли данная прямая в данной плоскости, параллельна плоскости или пересекает ее; в последнем случае найти точку пересечения прямой и плоскости.

п р я м а я	п л о с к о с т ь
$\begin{cases} 3x + 5y - 7z + 16 = 0 \\ 2x - y + z - 6 = 0 \end{cases}$	$5x - z - 4 = 0$
$\begin{cases} 2x + 3y + 6z - 10 = 0 \\ x + y + z + 5 = 0 \end{cases}$	$y + 4z + 17 = 0$

*Решение.* Меняя местами первое и второе уравнение, приводим матрицу к специальному ступенчатому виду:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 111 & -5 & & \\ 236 & 10 & & \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 111 & -5 & & \\ 014 & 20 & & \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 10-3 & -25 & & \\ 014 & 20 & & \end{array} \right).$$

Получаем параметрическое уравнение прямой:

$$X = -25 + 3t$$

$$Y = 20 - 4t$$

$$Z = t.$$

Подставляя его в уравнение плоскости, получаем:

$(20 - 4t) + 4t + 17 \neq 0$ , т. е. прямая параллельна плоскости.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 8 = 0 \\ 5x + 3y + z - 16 = 0 \end{cases} \quad 2x - y - 4z - 24 = 0.$$

16. Установить, какие из следующих пар прямых скрещиваются, параллельны, пересекаются или совпадают; если прямые параллельны, то написать уравнение плоскости, через них проходящей; если прямые пересекаются, то написать уравнение содержащей их плоскости и найти их общую точку.

$$1) \quad \left. \begin{aligned} x &= 1 + 2t, y = 7 + t, z = 3 + 4t; \\ x &= 6 + 3t, y = -1 - 2t, z = -2 + t; \end{aligned} \right\}$$

$$2) \quad \left. \begin{aligned} x &= 1 + 2t, y = 2 - 2t, z = -t; \\ x &= -2t, y = -5 + 3t, z = 4; \end{aligned} \right\}$$