

О ЯВЛЕНИЯХ РЕЗОНАНСА n -ГО РОДА

Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси

Введение. Теоретическая часть.—I. Теория резонанса n -го рода.—Основные предпосылки и вывод основного уравнения. О некоторых схемах регенеративных колебательных систем и о способах воздействия на них. О периодических решениях уравнения $\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}) + \lambda_0 \sin n\tau$ (7). Об условиях устойчивости периодических решений. О явлениях резонанса n -го рода и о связи его с явлениями параметрического резонанса. Автопараметрическое возбуждение.—II. Нахождение решения уравнения (7).—Специализация функции $f(x, \dot{x})$. Примеры аппроксимирования характеристик ламп с помощью степенных рядов. III. Случай мягкого самовозбуждения.—Случай $n=2$. Общие выводы. О границах областей устойчивости. Величина области, в которой существует главное решение. О явлениях резонанса второго рода. Случай $\kappa < 0$ (несамовозбужденная система). Принудительная синхронизация на обертоне (самовозбужденная система). Явления гашения. Случай $n=3$. IV. Случай жесткого самовозбуждения. Общие формулы. Случай $(\delta=0, X^2 \gg \frac{\lambda^2}{9})$. Условия получения резонанса второго рода в чистом виде „жесткого“ режима. О резонансе второго рода при режиме „жесткого“ возбуждения ($\epsilon_1 < 0, \gamma_1 < 0$). Явления принудительной синхронизации и „тушения“ при „жестком“ режиме. О возможности распространения теории на более общие случаи. Экспериментальная часть.—Мягкий режим. „Жесткое“ возбуждение. Случай $\kappa > 0$ (явление тушения).

Введение

В настоящей статье разбирается с теоретической и экспериментальной стороны явление, которое целесообразно назвать резонансом второго (n -го) рода. Исследование этого явления представляет по нашему мнению интерес, как с чисто физической точки зрения, так и потому, что резонанс n -го рода может быть положен в основу приемных устройств в беспроводной телеграфии, представляющих, как показал опыт, некоторые довольно существенные преимущества.

Математические основы теории явления резонанса второго рода, во всяком случае, в общей форме безотносительно к физическим устройствам содержатся в известных работах Пуанкаре.¹ Общая теория Пуанкаре показала, что в нелинейных системах могут наступать периодические колебания, с периодом, кратным периоду действующей силы. Исходя из этих теоретических соображений, мы поставили себе задачу осуществить и исследовать такого рода колебания, в первую очередь в электрических системах. Следует заметить, что некоторые явления, несомненно относящиеся к этому классу, наблюдались Кюга,² ван дер Полем³ и др. Так Кюга наблюдал, что при определенных настройках период самовозбужденной автоколебательной системы становится кратным периоду действующей силы. Грошковский⁴ также упоминает о возбуждении в несамовозбужденной системе колебаний с частотой равной половине частоты воздействия.

Прежде чем перейти к теоретической трактовке и изложению опытного материала, мы хотели бы описать наблюдаемые явления в суммарном виде, а также

¹ N. Poincaré. Méthodes nouvelles de la mécanique céleste, т. I. стр. 79, 1897.

² Koga. Proc. Inst. Rad. Eng. 15 p. 669, 1927.

³ B. van der Pol. Phil. Mag. 3, 65, 1927.

⁴ Groshkowsky. Proc. Inst. Radio Eng. 18, 1960, 1930.

охарактеризовать теоретическую постановку вопроса. Если действовать гармонической силой частоты ω на обыкновенный ламповый генератор с обратной связью, то явления в нем будут, как известно, носить совершенно различный характер в зависимости от величины обратной связи. Целесообразно, не считая определения окончательным, ввести для краткости следующие термины для охарактеризования систем (без внешней силы), с которыми мы будем иметь дело. Мы будем разбирать случаи, когда система самовозбуждена, или когда она же уменьшением обратной связи или изменением другого параметра переводится в несамовозбужденное состояние. Мы будем говорить об автоколебательной системе просто — в первом случае и потенциально-автоколебательной — во втором.

До настоящего времени при исследовании таких систем (как авто так и потенциально-автоколебательных), находящихся под действием гармонической силы, главное внимание обращали на тот случай, когда период возбуждающей силы был точно или приблизительно равен собственному периоду системы. Здесь следует упомянуть работы Мёллера¹ и других. При рассмотрении автоколебательных систем представляет интерес явление так называемого „захватывания“ или „увлечения“ частоты или другими словами наличие периодических решений соответствующей математической задачи. Эта задача была с достаточной полнотой рассмотрена А. Андроновым и А. Виттом.² Менее строго квази-периодические решения были исследованы ранее.³

С явлениями, существенно отличающимися от этих, мы имеем дело тогда, когда частота действующей силы кратна или приблизительно кратна собственной частоте системы. При этом наблюдается следующее: при определенном режиме возбуждаемые в потенциально-автоколебательной системе колебания будут чрезвычайно слабы до тех пор, пока собственный период ее не приближается к величине, кратной периоду действующей силы. В тот момент, когда собственный период системы достаточно близок к удвоенному внешнему периоду, в ней возникают интенсивные колебания с частотой точно равной $\frac{\omega}{2}$ (вообще $\frac{\omega}{n}$). Это явление и есть явление резонанса второго (n -ого) рода, исследование которого и является предметом настоящей статьи. При экспериментальном исследовании явления резонанса n -ого рода мы наталкиваемся и на отличное явление, о котором уместно упомянуть уже здесь. Для того чтобы наступило явление резонанса n -ого рода, необходимо подобрать определенный режим лампы. Если несколько изменить этот режим лампы в сторону увеличения обратной связи, но так, чтобы система продолжала оставаться потенциально-автоколебательной, то в ней возбуждаются, независимо от периода действующей силы, интенсивные колебания с периодом, почти совпадающим с собственными колебаниями системы. Наряду с этими интенсивными колебаниями имеются и слабо выраженные „вынужденные“ колебания, так что весь процесс является с физической стороны квази-периодическим.

Это и есть асинхронное возбуждение. Как уже было указано выше, настоящая работа преследует своей целью исследование периодических колебаний и в ней мы только попутно укажем на соотношения между ними и квази-периодическими колебаниями, которые мы рассмотрим более детально в другом месте.⁴

¹ H. G. Möller, Jahrbuch f. drahtlose Telegraphie 17, s. 256. 1921.

² A. Andronoff und A. Witt, Archiv f. Elektrotechnik XXIV, 1930, стр. 99.

³ В самое последнее время появились математические работы, относящиеся к важному классу квази-периодических решений, см. N. Kryloff et N. Bogoluboff, C. R. 194 957, 1064, 1932.

⁴ О наших исследованиях в области явлений резонанса n -ого рода было доложено одним из нас на I Всесоюзном съезде физиков в Одессе в августе 1930 г.

Возвращаясь к вопросу о периодических колебаниях с n -кратным периодом, мы заметим следующее. Математическое исследование вопроса сводится к исследованию уравнения;

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}) + \lambda_0 \sin n\tau. \quad (*)$$

Требуется исследовать, когда и при каких условиях это уравнение имеет решение с периодом $\frac{2\pi}{n}$. Рассматриваемый в данном случае параметр μ очень мал. Для того чтобы найти решение, можно поступить следующим образом. Предположим, что существует решение в форме:

$$x = a \sin \tau - b \cos \tau + \frac{\lambda_0}{1-n^2} \sin n\tau,$$

подставляем его в уравнение (*) и приравниваем нулю коэффициенты при членах с $\cos \tau$ и $\sin \tau$. Это дает два уравнения относительно a и b , из которых эти величины и могут быть определены. При простой форме характеристики лампы такое определение не представляет значительных затруднений. Заметим, что найденные таким образом решения, поскольку они действительны, фактически являются, вообще говоря, приближенными решениями задачи и в действительности вычисления, как это видно из дальнейшего (см. §§ 6, 8 и далее, к этому и сводятся. Однако ограничиться таким способом трактовки недостаточно. Не говоря о том, что такой способ рассмотрения задачи постулирует существование решения, он не указывает пути для нахождения дальнейших приближений и не дает возможности решить, соответствуют ли эти решения физической задаче, т. е. устойчивы ли они или нет. Этот вопрос, правда, можно было бы также решить сравнительно простыми, но недостаточно убедительными рассуждениями. Нам поэтому казалось целесообразным, исходя из методов Пуанкаре,¹ действительно обосновать в достаточно общем виде как существование периодических решений, так и законность указанного способа расчета, тем более, что это обоснование одновременно дает и путь для отыскания последовательных приближений, а затем, основываясь на работах Ляпунова² исследовать в общем виде вопрос об устойчивости решений. Согласно с этим мы в первых главах теоретической части рассматриваем теорию общего случая, а затем в следующих главах применяем полученные результаты к ряду типичных конкретных случаев. В экспериментальной части мы приводим ряд иллюстрирующих теорию примеров. Настоящая статья совпадает в своей существенной части с нашей работой, опубликованной в журнале *Zeitschrift für Physik*,³ которая в своей теоретической части относится исключительно к периодическим решениям.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

I. Теория резонанса n рода

§ 1. Основные предпосылки и вывод основного уравнения

В качестве одной из простейших нелинейных колебательных систем рассмотрим линейный колебательный контур с регенерацией при помощи электронной лампы (рис. 1) (регенеративный приемник). Мы предполагаем, что колебательный контур находится в анодной цепи и что внешняя ЭДС $E = E_0 \sin \omega t$ действует непосредственно на него. Как показано ниже (см. § 2) в этом случае приводится к теории других схем (напр., схема с контуром в цепи сетки) и других способов воздействия (воздействия на цепь сетки). Мы предполагаем далее, что

¹ Poincaré, loc. cit.

² А. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения, изд. Харьк. мат. об-ва, Харьков, 1892.

³ L. Mandelstam und N. Papalex. ZS. für Phys. 73, 223, 1931.