Digitized by Google

Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen *).

(Von Frau *Sophie von Kowalevsky*.)

Einleitung.

Es sei eine algebraische Differentialgleichung

$$(1.)\qquad G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

vorgelegt, wo G eine ganze rationale Function der unabhängigen Veränderlichen x, der als Function derselben zu bestimmenden Grösse y und der Ableitungen derselben nach x bis zur n^{ten} Ordnung hin bedeutet.

Eine analytische Function ist vollständig bestimmt, sobald irgend ein regulärer Zweig derselben gegeben ist. Es kommt also darauf an, auf die allgemeinste Weise eine Potenzreihe

$$\sum_0^\infty {}_\nu b_\nu \frac{(x-a)^\nu}{\nu!},$$

wo a, b_0, b_1, ... Constanten bedeuten, so zu bestimmen, dass dieselbe, für y gesetzt, der gegebenen Differentialgleichung genügt, und innerhalb eines gewissen, die Stelle a umgebenden Bezirks convergirt.

Es muss also, wenn man diese Reihe für y in den Ausdruck $G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}\right)$ einsetzt und denselben nach Potenzen von $x-a$ entwickelt, jeder einzelne Coefficient dieser Entwickelung gleich Null werden.

So erhält man zunächst zwischen a, b_0, b_1, ... b_n die Gleichung

$$(2.)\qquad G(a, b_0, b_1, \ldots b_n) = 0.$$

Nun hat aber, wenn y irgend eine reguläre Function von x ist, die λ^{te} Ableitung von

$$G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}\right)$$

die Form

$$G'\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}\right)\frac{d^{n+\lambda} y}{dx^{n+\lambda}} + H_\lambda\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^{n+\lambda-1} y}{dx^{n+\lambda-1}}\right),$$

wo G' die partielle Ableitung von G in Beziehung auf $\frac{d^n y}{dx^n}$, und H_λ eine

*) Diese Abhandlung ist zugleich als Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doctorwürde bei der philosophischen Facultät zu Göttingen erschienen.

Digitized by Google

Digitized by Google

ganze rationale Function von x, y, $\frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^{n+\lambda-1}y}{dx^{n+\lambda-1}}$ bezeichnet. Es muss also (für $\lambda = 1, 2, \ldots \infty$)

$$(3.) \qquad G'(a, b_0, b_1, \ldots b_n) b_{n+\lambda} + H_\lambda(a, b_0, b_1, \ldots b_{n+\lambda-1}) = 0$$

sein, wenn der Coefficient von $(x-a)^\lambda$ in der genannten Entwickelung von

$$G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}\right)$$

verschwinden soll. Umgekehrt genügt die für y angenommene Reihe der Gleichung (1.) formell, wenn die Gleichung (2.) und sämmtliche Gleichungen (3.) erfüllt werden.

Durch die Gleichungen (3.) werden aber sämmtliche Coefficienten b_ν, deren Index $> n$ ist, eindeutig bestimmt, sobald a, b_0, b_1, ... b_n gegeben sind und zugleich $G'(a, b_0, b_1, \ldots b_n)$ einen von Null verschiedenen Werth hat.

So ergiebt sich der Satz:

„Nimmt man die Constanten

$$a, \quad b_0, \quad b_1, \quad \ldots \quad b_n$$

willkürlich, jedoch so an, dass die Gleichung

$$G(a, b_0, b_1, \ldots b_n) = 0$$

eine einfache Wurzel b_n hat, so lassen sich die Grössen

$$b_{n+1}, \quad b_{n+2}, \quad \ldots$$

stets in eindeutiger Weise so bestimmen, dass

$$\sum_0^\infty {}_\nu\, b_\nu \frac{(x-a)^\nu}{\nu!},$$

für y gesetzt, der Gleichung (1.) *formell* genügt."

Diese Reihe ist aber auch stets innerhalb eines bestimmten Bezirks convergent und stellt, wenn man x innerhalb desselben annimmt, eine die vorgelegte Differentialgleichung befriedigende Function dar. Aus jeder solchen Reihe entspringt dann ferner eine bestimmte (eindeutige oder mehrdeutige) analytische Function, von der jeder reguläre Zweig die vorgelegte Differentialgleichung ebenfalls befriedigt *).

---

*) Dieser Satz findet sich zuerst in der *Weierstrass*schen Abhandlung „Zur Theorie der analytischen Facultäten" (*Crelle*s Journal, Bd. 51, S. 43) ausgesprochen, und ist bald darauf auch von den Herren *Briot* und *Bouquet* bewiesen worden (Journal de l'Ecole polytechnique cah. 36). Derselbe bleibt bestehen, wenn der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (1.) eine eindeutige und in eine beständig convergirende Potenzreihe der Grössen x, y, $\frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}$ entwickelbare Function ist.

Digitized by Google

Umgekehrt hat jede die vorgelegte Differentialgleichung befriedigende analytische Function y unendlich viele, durch das angegebene Verfahren bestimmbare reguläre Zweige, wenn sie nicht eine sogenannte singuläre Lösung der Differentialgleichung ist, d. h. ausser derselben noch der Gleichung

$$G'\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

genügt. In diesem Falle kann man aber durch Combination der beiden Gleichungen

$$G = 0, \quad G' = 0$$

zur Bestimmung der Function y entweder eine algebraische Gleichung oder eine Differentialgleichung, von der sie keine singuläre Lösung ist, erhalten.

Analoge Sätze gelten ferner, wenn zur Bestimmung mehrerer Functionen einer unabhängigen Veränderlichen ein System von ebenso vielen algebraischen Differentialgleichungen gegeben ist.

Dasselbe kann stets auf die Form

$$(5.) \quad \begin{cases} G'(x, y_0, y_1, \cdots y_n)\dfrac{dy_1}{dx} - G_1(x, y_0, y_1, \cdots y_n) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ G'(x, y_0, y_1, \cdots y_n)\dfrac{dy_n}{dx} - G_n(x, y_0, y_1, \cdots y_n) = 0 \end{cases}$$

gebracht werden, wo $y_1, \ldots y_n$ die zu bestimmenden Functionen sind, y_0 eine mit $x, y_1, \ldots y_n$ durch eine irreductible algebraische Gleichung

$$(6.) \qquad G(x, y_0, y_1, \cdots y_n) = 0$$

verbundene Hülfsgrösse, $G, G_1, \ldots G_n$ ganze rationale Functionen von x, $y_0, y_1, \ldots y_n$, und G' die partielle Ableitung von G in Beziehung auf y_0 *).

Setzt man dann, für $\lambda = 0, 1, \ldots n$

$$(7.) \qquad y_\lambda = \sum_0^\infty{}_\mu\, b_{\lambda,\mu} \frac{(x-a)^\mu}{\mu!},$$

und nimmt

$$a, \quad b_{1,0}, \quad b_{2,0}, \quad \ldots \quad b_{n,0}$$

so an, dass die Gleichung

$$G(a, b_{0,0}, b_{1,0}, \cdots b_{n,0}) = 0$$

*) Wie man jedes System algebraischer Differentialgleichungen auf diese „kanonische" Form zurückführen kann, lehrt *Jacobi* in den Abhandlungen: „De investigando ordine systematis differentialium vulgarium cujuscunque" (*Borchardts* Journal, Bd. 64, S. 237) und „De aequationum differentialium systemate non normali ad formam normalem revocanda" (Vorlesungen über Dynamik, Anhang, S. 55).