

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени академика С.П. КОРОЛЕВА  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

А.А. БУХАНЬКО, О.П. ЧОСТКОВСКАЯ

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ  
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ,  
УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ  
И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебно-методического пособия*

САМАРА  
Издательство СГАУ  
2011

УДК СГАУ: 519.24 (075)

ББК 22.1я7

Б 94

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, доц. СамГУ Л.В. Степанова;

д-р физ.-мат. наук, проф. СГАУ А.И. Хромов.

*Буханько А.А., Чостковская О.П.*

Б 94 **Приближенные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными и интегральных уравнений:** учеб.-метод. пособие / *А.А. Буханько, О.П. Чостковская.* – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2011. - 68 с.: ил.

ISBN 978-5-7883-0816-6

Пособие посвящено методам нахождения приближенных решений краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными (гиперболического, параболического и эллиптического типов) и интегральных уравнений (Фредгольма, Вольтерра). Пособие содержит материалы, необходимые для выполнения курсовой работы по курсу «Уравнения математической физики».

Предназначено для студентов специальностей «Механика и математическое моделирование», «Динамика и прочность машин» и других инженерно-технических специальностей, а также для аспирантов и инженерно-технических работников. Предложенный материал полезен при изучении приближенных методов решения задач некоторых разделов математики и механики.

ISBN 978-5-7883-0816-6

© Самарский государственный  
аэрокосмический университет, 2011

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1 ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	5
1.1 Метод конечных разностей .....	5
1.2 Метод прогонки .....	8
1.3 Базисные функции .....	15
1.4 Метод Галеркина .....	16
1.5 Метод коллокаций .....	20
1.6 Метод Рунге для простейшей краевой задачи .....	21
2 МЕТОД СЕТОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ	25
2.1 Метод сеток для уравнений параболического типа .....	27
2.2 Метод сеток для уравнений гиперболического типа .....	32
2.3 Метод сеток для задачи Дирихле .....	37
2.4 Итерационный метод решения системы конечно-разностных уравнений .....	39
3 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	43
3.1 Метод последовательных приближений .....	44
3.2 Метод конечных сумм .....	47
3.3 Метод вырожденного ядра .....	51
4 ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ	55
I Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений .....	55
II Уравнения в частных производных .....	55
III Интегральные уравнения .....	58
ПРИЛОЖЕНИЕ I. Аналитические решения уравнений в частных производных (метод Фурье)	61
I.1 Смешанная задача о колебаниях однородной струны .....	61
I.2 Смешанная задача о теплопроводности в однородном стержне .....	62
ПРИЛОЖЕНИЕ II. Связь между дифференциальным уравнением и уравнением Вольтерра	64
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	66

## ВВЕДЕНИЕ

В самых разнообразных областях современной науки и техники часто приходится встречаться с математическими задачами, для которых невозможно получить точное решение классическими методами или же решение может быть получено в таком сложном виде, которое неприемлемо для практического использования.

Цель пособия – помочь студенту при изучении приближенных методов решения различных дифференциальных и интегральных уравнений. В данной работе рассмотрены основные вычислительные методы, позволяющие найти приближенные решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными и интегральных уравнений. В каждом разделе для лучшего понимания алгоритмов решений приведены примеры расчетов.

В первой главе пособия рассматриваются численные и аналитические методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Вторая глава посвящена одному из самых распространенных методов численного решения уравнений с частными производными – методу сеток. Рассматривается применение этого метода для уравнений параболического, гиперболического и эллиптического типов.

В третьей главе рассматриваются некоторые численные методы решения интегральных уравнений: методы последовательных приближений, конечных сумм и вырожденного ядра.

Четвертая глава содержит задание на курсовую работу по курсу «Уравнения математической физики». Выполнение курсовой работы требует самостоятельного составления краевых задач и интегральных уравнений, их решения приближенными методами и сравнения с точным (аналитическим) решением. Цель курсовой работы состоит в том, чтобы освоить приближенные методы решения некоторых дифференциальных и интегральных уравнений. Структура курсовой работы соответствует структуре первых трех глав данного учебно-методического пособия.

Учебное издание

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ  
ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ,  
УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ**

*Учебно-методическое пособие*

***Буханько Анастасия Андреевна,  
Чостковская Ольга Петровна***

Редактор Н.С. Куприянова  
Верстка А.А. Буханько

Подписано в печать 08.08.2011. Формат 60x84 1/16

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Печ. л. 4,25.

Тираж 50 экз. Заказ . Арт. С – (Д1-6)/2011

Самарский государственный  
аэрокосмический университет.  
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

---

Изд-во Самарского государственного  
аэрокосмического университета.  
443086, Самара, Московское шоссе, 34.