

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

В. С. Климов

**Одномерные
вариационные
задачи**

Учебное пособие

*Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по специальностям
Математика и Прикладная математика и информатика*

Ярославль 2011

УДК 51
ББК В161.8я73
К49

*Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
в качестве учебного издания. План 2010/2011 учебного года*

Рецензенты:

Смирнов Е. И., доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа ЯГПУ им. К. Д. Ушинского;
кафедра прикладной математики и вычислительной техники ЯГТУ

К49 Климов, В. С. Одномерные вариационные задачи: учебное пособие / В. С. Климов ; Яросл. гос. ун-т. им. П. Г. Демидова — Ярославль : ЯрГУ, 2011. — 140 с.

ISBN 978-5-8397-0794-8

Пособие «Одномерные вариационные задачи» содержит следующие разделы дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации»: гладкие решения одномерных вариационных задач, принцип максимума Понтрягина, дополнения и замечания.

Предназначено для студентов университетов, обучающихся по специальностям 010100.65 Математика и 010200.65 Прикладная математика и информатика (дисциплина «Вариационное исчисление и методы оптимизации», блок ОПД), очной формы обучения. Первая часть пособия может быть полезной и для студентов педагогических университетов.

ISBN 978-5-8397-0794-8

УДК 51
ББК В161.8я73

©Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, 2010

Оглавление

Предисловие	5
1 Уравнения Эйлера–Лагранжа	7
1.1 Простейшая вариационная задача	7
1.2 Модификации простейшей вариационной задачи	21
1.3 Вариационные принципы	34
2 Принцип максимума Понтрягина	47
2.1 Постановка задачи оптимального управления	47
2.2 Оптимизация линейных систем	50
2.3 Леммы	62
2.4 Оптимизация нелинейных систем	70
2.5 Управляемые процессы с неизвестным временем окончания	77
2.6 Принцип максимума и вариационное исчисление	82
А Правило множителей Лагранжа	95
В О гладкости решений одномерных вариационных задач	103
С Метод условного градиента	117
С.1 Сходимость метода условного градиента	117
С.2 Приложения к задачам оптимального управления	126
Послесловие	137
Список литературы	138

Предисловие

Учебное пособие содержит изложение разделов дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации», изучаемых студентами третьего курса университетов специальности 010100.65 Математика и студентами четвёртого курса специальности 010200.65 Прикладная математика и информатика.

Весь материал разбит на две главы и три приложения. Первая глава посвящена классическому вариационному исчислению. Здесь выводятся уравнения Эйлера–Лагранжа для простейшей вариационной задачи, формулируются необходимые и достаточные условия слабого локального минимума. Далее изучаются различные обобщения простейшей вариационной задачи. Завершают главу вариационные принципы механики и физики: принцип Ферма и закон Снеллиуса преломления света, принцип Торичелли и задача о прогибе тяжёлой однородной нити, принцип наименьшего действия и геодезические линии на поверхности.

Во второй главе рассматриваются проблемы оптимального управления. Центральный результат главы – принцип максимума Понтрягина. Вначале этот принцип доказывается для весьма специального случая: управляемый объект линеен по фазовому переменному, время окончания процесса фиксировано, правый конец траектории свободен, критерий качества управления линейно зависит от правого конца траектории. В этой ситуации принцип максимума устанавливается очень просто, он является и необходимым, и достаточным условием оптимальности, его применение не вызывает затруднений. Вместе с тем, разобравшись с данным частным случаем, читатель будет готов к изучению более сложных вопросов теории линейных управляемых систем: задача на быстродействие и задача терминального управления. Ещё труднее в техническом отношении разделы, связанные с принципом максимума для нелинейных управляемых систем. Предполагаемая подготовка читателя и здесь не выходит за пределы действующих программ, однако становятся желательными определённое терпение и научный энтузиазм.

В значительно большей степени указанные выше положительные качества нужны для усвоения приложений. Содержащийся здесь материал ориентирован прежде всего на читателя, желающего углубить свои познания по экстремальным задачам, найти подходящие темы для курсовых, дипломных и других квалификационных работ.

Принятый порядок изложения не самый экономный с точки зрения затрачи-

ваемого времени. Если поставить экономию времени во главу угла, то было бы логично вначале изложить принцип максимума для нелинейных управляемых систем, затем в качестве следствия получить основные результаты вариационного исчисления. Неоднократно проведённые педагогические эксперименты показали, что способ изложения вариационного исчисления должен во многом повторять историю его развития. Именно подобный принцип – от простого к сложному – автор и пытался реализовать в данном пособии.

Используются следующие обозначения:

\emptyset – пустое множество;

\forall – "для всех" или "для каждого";

$:=$ или $\stackrel{def}{=}$ – "равно по определению";

◀ – начало доказательства; ▶ – конец доказательства;

$\frac{\partial u}{\partial x}$, u'_x , u_x – частная производная функции u по аргументу x ;

X^* – сопряжённое к банахову пространству X ; $\langle x, x^* \rangle$ – значение линейного функционала $x^* \in X^*$ на элементе $x \in X$;

\mathbb{R}^n – n -мерное арифметическое пространство вектор-столбцов $x = (x_i)$ над полем \mathbb{R} действительных чисел;

\mathbb{R}_n – n -мерное арифметическое пространство вектор-строк $x = (x_i)$ над полем \mathbb{R} действительных чисел; пространство \mathbb{R}_n будет отождествляться с пространством $(\mathbb{R}^n)^*$ линейных на \mathbb{R}^n функционалов;

$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_n$ – оператор транспонирования, сопоставляющий вектор-столбцу x вектор-строку x^T с теми же компонентами; такое же обозначение используется для оператора транспонирования, действующего из \mathbb{R}_n в \mathbb{R}^n ;

$\int_a^b \varphi(t) dt$ – интеграл от функции $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ по отрезку $[a, b]$;

$\nabla g(x) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \right)$ – градиент функции g в точке x , иначе говоря, вектор-

столбец, компоненты которого равны частным производным функции g ;

$g'(x) = (\nabla g(x))^T$ – соответствующая вектор-строка;

В пособии принята автономная (в пределах каждой главы своя) нумерация секций, разбитых на отдельные пункты. Формулы (теоремы, упражнения и т. п.) нумеруются в пределах каждой секции. При ссылках внутри секции указывается лишь номер соответствующей формулы (теоремы и т. п.); в противном случае приводится и номер секции. Например, формула 2.3(1) – это формула (1) из секции 2.3; лемма 1.2.3 – это лемма 3 из секции 1.2.

Многие разделы пособия обсуждались с коллегами из Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова, а также с математиками других вузов. Приношу всем им самую искреннюю признательность. Буду благодарен за указания на возможные ошибки в тексте, ответственность за которые автор полностью берёт на себя.

Климов В. С., доктор физико-математических наук.