МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
по уравнениям математической физики для студентов IT-направлений

Учебно-методическое пособие для вузов

Составители: А.А. Крыловецкий,
Т.А. Крыловецкая

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2014

ŋqdbayeY bE debEbYse d acaqcy JqdbYqye

Введение

Дифференциальным уравнением с частными производными называется уравнение, содержащее неизвестную функцию нескольких переменных и ее частные производные. Наиболее часто встречаются уравнения для функций двух или трех переменных.

В курсе уравнений математической физики изучаются уравнения в частных производных, возникающие в физических задачах.

Из курса математического анализа известно, что частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ функции $f(x, y, z)$ по x в точке (x_0, y_0, z_0) называется предел отношения

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}.$$

Примеры уравнений первого порядка, содержащих частные производные только первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Примеры уравнений второго порядка, содержащих частные производные второго и, возможно, первого порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим простейшее уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u = u(x, y). \tag{3}$$

Очевидно, что его решение имеет вид

$$u(x, y) = \varphi(y), \tag{4}$$

где $\varphi(y)$ — произвольная функция.

Другой пример уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(y), \quad \text{где } f(y) - \text{заданная функция.} \tag{5}$$

Его общее решение

$$u(x, y) = \int f(y)dy + \varphi(x), \tag{6}$$

Рассмотрим вопрос о приведении уравнения вида (16) к наиболее простому виду. Для этого сделаем замену переменных:

$$x \to \xi = \varphi(x, y), \quad y \to \eta = \psi(x, y). \tag{18}$$

Воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y. \tag{19}$$

Далее

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_\xi \xi_x)_x + (u_\eta \eta_x)_x = \\ &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_\xi \xi_{xx} + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_{\eta\xi}\eta_x\xi_x + u_\eta \eta_{xx} = \\ &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}. \end{aligned} \tag{20}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + \\ &+ u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}. \end{aligned}$$

Подставляем вычисленные значения производных в уравнение (16):

$$\tilde{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\tilde{a}_{12}u_{\xi\eta} + \tilde{a}_{22}u_{\eta\eta} + \tilde{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0. \tag{21}$$

Коэффициенты при старших производных имеют вид:

$$\tilde{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2, \tag{22}$$

$$\tilde{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y, \tag{23}$$

$$\tilde{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2. \tag{24}$$

Очевидно, что наиболее простой вид рассматриваемое уравнение будет иметь, если $\tilde{a}_{11} = 0$ и $\tilde{a}_{22} = 0$.

Для того чтобы $\tilde{a}_{11} = 0$, необходимо, чтобы функция $\varphi(x, y)$ была решением уравнения

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0. \tag{25}$$

Для того чтобы $\tilde{a}_{22} = 0$, необходимо, чтобы функция $\psi(x, y)$ также была решением уравнения (25).

Теорема. Для того чтобы функция $z = \varphi(x, y)$ удовлетворяла уравнению (25), *необходимо и достаточно, чтобы соотношение*

$$\varphi(x, y) = C \tag{26}$$

было общим интегралом уравнения

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0. \tag{27}$$

Докажем необходимость. Пусть функция $z = \varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (25). Тогда из (25) получаем:

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} = 0. \tag{28}$$

Из (26) находим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \tag{29}$$

и подставляем в уравнение (28):

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\left(\frac{dy}{dx}\right) + a_{22} = 0. \tag{30}$$

Отсюда получаем уравнение (27).

Простейшее доказательство достаточности состоит в следующем. Пусть $\varphi(x, y) = C$ — общий интеграл уравнения (27). Получаем

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\left(\frac{dy}{dx}\right) + a_{22} = 0.$$

Подставляя сюда (29), находим

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} = 0.$$

Отсюда

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, если $\xi = \varphi(x, y)$ и $\varphi(x, y) = const$ есть общий интеграл уравнения

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0, \tag{31}$$

то коэффициент при $u_{\xi\xi}$ равен нулю.

Если $\xi = \psi(x, y)$ и $\psi(x, y) = const$ есть другой независимый интеграл этого уравнения, то коэффициент при $u_{\eta\eta}$ равен нулю.

Уравнение (31) называется характеристическим, а его интегралы – характеристиками.

Уравнение (31) распадается на два:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \tag{32}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{33}$$

Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F = 0. \tag{34}$$

Если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, то уравнение (34) — уравнение гиперболического типа.

В этом случае правые части (32) и (33) действительны и различны. Получаем соответствующие общие интегралы $\varphi(x, y) = C$ и $\psi(x, y) = C$. Далее выполняем замену переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y) \tag{35}$$

и, разделив на коэффициент при $u_{\xi\eta}$,получаем уравнение вида

$$u_{\xi\eta} = G(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \tag{36}$$

Полученное уравнение (36) – каноническая форма уравнений гиперболического типа.

Далее выполним замену

$$\xi = \alpha + \beta, \quad \eta = \alpha - \beta$$

или

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2}.$$

Тогда $u = u(\alpha(\xi, \eta), \beta(\xi, \eta))$ и

$$u_\xi = u_\alpha \alpha_\xi + u_\beta \beta_\xi = \frac{u_\alpha + u_\beta}{2},$$
$$u_\eta = u_\alpha \alpha_\eta + u_\beta \beta_\eta = \frac{u_\alpha - u_\beta}{2},$$

$$u_{\xi\eta} = u_{\alpha\alpha}\alpha_\xi\alpha_\eta + u_{\alpha\beta}\alpha_\xi\beta_\eta + u_\alpha\alpha_{\xi\eta} +$$
$$+ u_{\beta\alpha}\beta_\xi\alpha_\eta + u_{\beta\beta}\beta_\xi\beta_\eta + u_\beta\beta_{\xi\eta} = \frac{u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}}{4}.$$