

УДК 531

Mathematical Surveys and Monographs. Volume 78

Boris A. Kupershmidt

**KP or mKP: Noncommutative Mathematics of
Lagrangian, Hamiltonian, and Integrable
Systems**

American Mathematical Society (Providence, 2000)



Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту №02-01-14001.

Купершмидт Б. А.

КП или МКП: некоммутативная математика лагранжевых, гамильтоновых и интегрируемых систем. — Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002, 624 стр.

В книге известного американского математика развивается общая теория динамических систем с некоммутирующими переменными, и интегрируемых систем, в частности; гамильтонов формализм и вариационное исчисление; как в непрерывных, так и в дискретных пространствах. Для чтения книги достаточно основ алгебры и анализа, все необходимое содержится в самой книге. Вводимые понятия подробно мотивируются, каждый раз после тщательного анализа множества конкретных моделей. Книга содержит значительное число упражнений.

Для математиков-прикладников, механиков, физиков, аспирантов и студентов университетов.

ISBN 5-93972-170-2

© Институт компьютерных исследований, 2002

<http://rcd.ru>

Оглавление

Предисловие

Часть А. Непрерывное пространство-время

Глава 1. Иерархия КП	3
1.1 Основные уравнения и их простейшие свойства	3
1.2 Гамильтонов формализм для иерархии КП	9
1.3 Кватернионная иерархия КП	14
1.4 Иерархия КП со значениями в конечномерных ассоциативных алгебрах	18
1.5 Одевающие движения	22
Глава 2. Иерархия МКП	25
2.1 Вывод основных уравнений и коммутативность потоков для иерархии МКП	25
2.2 Гамильтонов формализм для иерархии МКП	27
2.3 Иерархия МКП со значениями в конечномерных ассоциативных алгебрах	31
2.4 Уравнения диспергирующих волн на воде	34
2.5 Иерархия Бюргерса	36
2.6 Иерархия Кортевега-де Фриза	39
2.7 Одета иерархия МКП	44
Глава 3. Между КП и МКП	47
3.1 Преобразование Миуры на языке представления Лакса	47
3.2 Преобразование Миуры на языке уравнений Вильсона	52
3.3 Гамильтоновость преобразования Миуры из МКП в КП	54
3.4 От ДВВ к КП	66
3.5 От НУШ к КП	68
3.6 От НУШП к КП	75
3.7 Между НУШП и НУШ	80
3.8 Изоморфизм ДВВ и НУШ	81
3.9 Настоящее преобразование Миуры между иерархиями КдФ и МКдФ	86
3.10 Факторизованное КП, или МКП ^{II}	109
3.11 P.S.: пересмотр полностью неабелевого преобразования Миуры между иерархиями КП и Pot-МКП: полная гамильтоновость	113
Глава 4. Некоммутативный лагранжев формализм	123
4.1 Мотивировки, полученные при вскрытии уравнения КдФ	123
4.2 Вариационные производные и родственные понятия	125
4.3 Формула преобразования вариационной производной	131
4.4 Вариационный комплекс	134
4.5 Формула вычетов	139
4.6 Преобразование Лежандра	141
4.7 Локализация	144

Глава 5. Некоммутативный гамильтонов формализм	147
5.1 Основной результат гамильтонова формализма	147
5.2 Гамильтоновы отображения	152
5.3 Линейные и аффинные гамильтоновы операторы, алгебры Ли и 2-коциклы	154
5.4 Локально-глобальный принцип	159
5.5 Гамильтонов аналог гомоморфизма алгебр Ли	163
Глава 6. $\text{МКП} = \text{М} + \text{КП}$	165
6.1 КП, МКП, КдФ и другие уравнения, как некоммутативные гамильтоновы системы	165
6.2 Обращение необратимого преобразования Миуры между иерархиями МКП и КП	171
6.3 $\text{М}^2\text{КП}$	174
6.4 Представления Клебша	179
6.5 Формула типа Концевича	185
6.6 Третья гамильтонова структура иерархии МКП	188
Глава 7. Квазирелятивистская иерархия КП	191
7.1 Вывод основных уравнений и коммутативность потоков	191
7.2 Гамильтонов формализм для квазирелятивистских потоков	198
7.3 Квазирелятивистская иерархия НУШ	205
Глава 8. Вторая конструкция интегралов иерархии КП	209
8.1 Формулы Вильсона	209
8.2 Формулы Чередника-Флашки	211
8.3 Формула обращения	216

Часть В. Дискретное пространство, непрерывное время

Глава 9. Сначала КП, потом МКП	221
9.1 Эволюции по типу КП	221
9.2 Одевающая сцена	225
9.3 Эволюции типа МКП	227
9.4 Модифицированная одевающая сцена	230
9.5 КП из МКП	231
9.6 Преобразование Миуры в одевающих пространствах	234
9.7 Классический предел	235
9.8 Квазиклассический предел	236
9.9 Факторизация КП и модифицированная цепочка Тоды	239
Глава 10. Некоммутативное дифференциально-разностное исчисление	245
10.1 Вариационный язык	245
10.2 Естественные свойства вариационных производных	251
10.3 Вариационный комплекс	254
10.4 Формула вычетов	259
Глава 11. Некоммутативный гамильтонов формализм над дифференциально-разностными кольцами	263
11.1 Основной результат гамильтонова формализма	263
11.2 Гамильтоновы отображения	265
11.3 Аффинные гамильтоновы операторы, 2-коциклы на алгебрах Ли, и т.п.	266

Глава 12. Гамильтонов формализм для дискретных интегрируемых систем типа КП и МКП	269
12.1 Системы типа КП	269
12.2 Системы типа МКП	272
12.3 Преобразование Миуры из КП в МКП гамильтоново	274
12.4 Целевые редукции и вторая гамильтонова структура	280
12.5 Формула типа Концевича	282
12.6 Третья гамильтонова структура иерархии МКП	283
Глава 13. Формы Гиббонса	293
13.1 Форма Гиббонса иерархии КП	293
13.2 Формы Гиббонса иерархии МКП	297
13.3 Преобразование Миуры между формами Гиббонса иерархий КП и МКП	299
13.4 Четвертая форма Гиббонса иерархии МКП	304
13.5 Полностью билинейная форма иерархии КП	307
13.6 Пятая форма Гиббонса иерархии МКП	308
13.7 Форма Гиббонса иерархии КП в G -координатах	313
13.8 Потенциальная иерархия МКП в G -координатах как неголономная динамическая иерархия, и ассоциированное преобразование Миуры	315
13.9 Форма Гиббонса при целевых редукциях	318
Глава 14. Гидродинамическое представление	321
14.1 Мотивировки	321
14.2 Гамильтонов подход в случае КП	324
14.3 Алгебраическая интерпретация случая КП	328
14.4 Гидродинамическая форма иерархии МКП	331
14.5 Гидродинамическое преобразование Миуры	335
14.6 Гидродинамическая форма иерархии КП в G -координатах	340
14.7 Гидродинамическая форма иерархии МКП в G -координатах	343
14.8 Некоммутативные решеточные аналоги иерархии Бюргерса без вязкости	350
14.9 Одевающая форма гидродинамического представления	352
Глава 15. Релятивистская цепочка Тоды и родственные системы	355
15.1 Квазирелятивистский анзац и его основные свойства	355
15.2 На краю Вселенной	359
15.3 Гамильтонов формализм для квазирелятивистской иерархии КП	361
15.4 Квазирелятивистская форма Гиббонса	364
15.5 Гидродинамические формы квазирелятивистской иерархии КП	365
15.6 Деформация иерархии МКП	366

Часть С. Дискретное пространство-время

Глава 16. Что такое представление Лакса и его дискретно-временной аналог	375
Глава 17. Системы типа КП	381
17.1 Иерархия КП	381
17.2 Форма Гиббонса и ее симплектические свойства	386
17.3 Гидродинамическая форма	390
17.4 Иерархия КП в G -координатах	398
17.5 Форма Гиббонса в G -координатах	409
17.6 Гидродинамическая форма в G -координатах	412
17.7 Факторизованное КП и модифицированная цепочка Тоды	418

Глава 18. Системы типа МКП	427
18.1 Иерархия МКП	427
18.2 Преобразование Миуры из КП в МКП	431
18.3 Первая и вторая формы Гиббонса	436
18.4 Третья форма Гиббонса и ассоциированное преобразование Миуры	438
18.5 Четвертая форма Гиббонса	441
18.6 Гидродинамическое представление и ассоциированное преобразование Миуры	443
18.7 Пространственно-временные дискретизации уравнения $H_t = HH_xH$ образуют семейство гамильтоновых отображений	449
18.8 Иерархия МКП в G -координатах	452
18.9 Форма Гиббонса в G -координатах и ее симплектические свойства	458
Глава 19. Цепочка Тоды, релятивистская цепочка Тоды и родственные системы	463
19.1 Задача дискретного одевания	463
19.2 Отрицательная эволюция цепочки Тоды	466
19.3 Релятивистская цепочка Тоды	469
19.4 Теневая релятивистская цепочка Тоды	474
19.5 Отрицательная эволюция модифицированной цепочки Тоды	477
19.6 Отрицательная эволюция системы Вольтерра	482
19.7 Положительная эволюция системы Вольтерра	485
19.8 Система Вольтерра с точки зрения цепочки Тоды	488
19.9 Обобщенные системы Вольтерра	490
19.10 Щелевая иерархия КП	494
19.11 Дискретизация времени, как факторизация	497
19.12 Решение задачи дискретного одевания	504
 Часть D. Приложения	
Приложение A1. Комплексификация гамильтоновых систем	511
Приложение A2. Асимптотические разложения гамильтоновых систем	515
A2.1 Мотивировка из примера: уравнение КдФ	515
A2.2 Векторные поля, дифференциальные формы, вариационные производные	519
A2.3 Гамильтоновы структуры	521
Приложение A3. Вариационное исчисление над некоммутативными кольцами	525
A3.1 Основные объекты	525
A3.2 Образ и ядро вариационного оператора δ	535
A3.3 Образ оператора $\partial + \varepsilon \text{ad}_u$	540
Приложение A4. Гамильтоновы соответствия	543
A4.1 От геометрии к алгебре	543
A4.2 Бесконечномерный случай	549
A4.3 Замкнутые 1-формы как лангранжевы подмногообразия, вариационная версия	553
A4.4 Производящие функции симплектических отображений и их обобщения	555
Приложение A5. Ковариантные аспекты гамильтонова формализма	559
A5.1 GL_{m+1} -теория и GL_2 -пример: уравнение КдФ	559
A5.2 Инфинитезимальные геометрические возмущения	563
Приложение A6. Некоммутативные солитоны	571
Приложение A7. Некоммутативное уравнение КП	575

Оглавление	vii
Приложение А8. Список скалярных уравнений	577
Приложение А9. Открытые проблемы и гипотезы	581
Приложение *А10. Некоммутативные версии уравнений $u_t = u^n u_x$	583
Приложение *А11. Некоммутативные свободные частицы имеют больше констант движения, чем степеней свободы	589
Замечания и комментарии	591
Литература	593
Предметный указатель/Обозначения	609

* Приложения *А10, *А11 добавлены для русского издания