Казанский институт (филиал) ГОУ ВПО
Российский государственный торгово-экономический университет

Кафедра информатики и высшей математики

КУШНИРЕНКО В.Н., ТАЛЫЗИН В.А.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

КАЗАНЬ-2013г.

ŋqdqɏəɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ ɈqddɎqɏè

Введение

Учебное пособие подготовлено в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по направлению экономика и предназначено для студентов заочного отделения.

Цель пособия – помочь студентам в усвоении фундаментальных математических понятий, овладении навыками их применения на практике при выполнении контрольной работы по соответствующим темам математического анализа.

В пособии рассмотрены такие разделы высшей математики как предел и производная функции, неопределенный и определенный интеграл, дифференциальные уравнения, ряда , а также применение математического аппарата производной и дифференциала функции в приближенных вычислениях для исследования функций и построения их графиков.

По каждой теме приводятся необходимые теоретические сведения, решаются типовые задачи, подобраны задания для самостоятельной работы и вопросы для самопроверки.

1. Предел функции

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при x, стремящимся к x_0, если для любого положительного числа ε ($\varepsilon>0$) найдется такое положительное число $\delta>0$ (зависящее в общем случае от ε), что для всех x, не равных x_0 и удовлетворяющих условию

$$|x-x_0|<\delta,$$

выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Для предела функции вводится обозначение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Пределы функций обладают следующими основными свойствами:

1. Функция не может иметь более одного предела.

2. Если $f(x) = C$ (постоянная), то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C.$

3. Если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то для любого числа C верно равенство: $\lim\limits_{x \to x_0} [Cf(x)] = C \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = CA.$

4. Если существуют $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, то $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)g(x)] =$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = AB$, $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \pm B,$

   а если $B \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

5. Операция предельного перехода перестановочна с операцией вычисления непрерывной функции, т. е. справедлива формула $\lim\limits_{x \to x_0} f[g(x)] = f\left[\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\right].$

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то искомый предел равен значению функции в этой точке, т.е. он находится непосредственной подстановкой предельного значения переменной вместо аргумента x : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой величиной* при $x \to x_0$, если ее предел в точке x_0 равен нулю: $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$ Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой величиной* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty.$

Пример 1.1. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x+3}{x-2} = \dfrac{2 \cdot 3 + 3}{3-2} = \dfrac{9}{1} = 9.$

Пример 1.2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x+3}{x-2} = \dfrac{2 \cdot 2 + 3}{2-2} = \dfrac{7}{0} = \infty.$

В рассмотренных примерах предел находился сразу в виде числа или символа ∞ (бесконечность). Но чаще при вычислении пределов мы встречаемся с неопределенностями, когда результат нахождения предела не ясен. Например, в случае отношения двух бесконечно малых функций (условное обозначение $\left[\dfrac{0}{0}\right]$) или отношения двух бесконечно больших функций ($\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$). Кроме двух названных случаев встречаются неопределенности вида $[\infty - \infty], [0 \cdot \infty], [1^{\infty}], [\infty^{0}], [0^{0}].$

Для раскрытия неопределенностей используются специальные математические приемы и два следующих предела, которые играют особую роль в математике и поэтому называются замечательными:

- *первый замечательный предел* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1;$

-*второй замечательный предел* $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n} = \lim\limits_{n \to o} (1+n)^{\frac{1}{n}} = e$ (число Эйлера).