



Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту №02-01-14123.

### **Субботин А. И.**

Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 336 стр.

С уравнениями Гамильтона – Якоби и другими типами уравнений в частных производных первого порядка имеют дело многие разделы математики, механики, физики и их приложений. Как правило, функции, имеющие содержательный смысл в рассматриваемых задачах, не являются достаточно гладкими, чтобы удовлетворять этим уравнениям в классическом смысле. Таким образом, возникает необходимость вводить понятие обобщенного решения и развивать теорию и методы построения этих решений. Такие теории активно создаются и развиваются в течение последних 50-ти лет. Среди получивших признание и стремительно развивающихся в последнее время концепций: энтропийные решения С. Н. Кružкова, вязкостные решения М. Крэндалла и П. Л. Лионса, обобщенные решения на базе идемпотентного анализа, предложенные В. П. Масловым.

В книге излагается созданная А. И. Субботиным теория минимаксных решений, которая имеет истоки в теории позиционных дифференциальных игр Н. Н. Красовского, и может рассматриваться, как неклассический метод характеристик, где минимаксное решение должно быть слабо инвариантным относительно характеристических дифференциальных включений.

Приведены теоремы существования, единственности и корректности минимаксных решений, иллюстрационные модельные примеры и приложения к теории оптимального управления и дифференциальным играм, конструктивные и численные методы построения минимаксных решений, а также необходимые факты из теории дифференциальных включений, негладкого анализа и теории классических решений уравнений Гамильтона – Якоби.

Для специалистов в области теории дифференциальных уравнений, динамической оптимизации, негладкого анализа и их приложений, а также для преподавателей, студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

**ISBN 5-93972-206-7**

© Институт компьютерных исследований, 2003

<http://rcd.ru>

# Оглавление

<b>Введение</b>	7
<b>ГЛАВА I. Обобщенные характеристики уравнений в частных производных первого порядка</b>	12
1. Классический метод характеристик	12
2. Характеристические включения	19
3. Верхние и нижние полунепрерывные решения	27
4. Критерии слабой инвариантности минимаксных решений	37
5. Кусочно-гладкие решения	54
<b>ГЛАВА II. Задачи Коши для уравнений Гамильтона–Якоби</b>	67
6. Минимаксные решения уравнений Гамильтона–Якоби	67
7. Единственность минимаксного решения задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби	74
8. Существование минимаксного решения задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби	81
9. Единственность при ослабленных предположениях	99
10. Конструктивные и численные методы	110
<b>ГЛАВА III. Дифференциальные игры</b>	130
11. Основные понятия теории дифференциальных игр	130
12. Доказательство существования функции цены дифференциальной игры	141
13. Стабильные мосты и экстремальные стратегии	150
14. Некоторые замечания	164
15. Смешанные позиционные стратегии и контрстратегии	179
16. Конструктивные и численные методы теории дифференциальных игр	195
<b>ГЛАВА IV. Красовые задачи для УЧП первого порядка</b>	220
17. Задача Коши для уравнений Гамильтона–Якоби с дополнительными условиями в форме неравенств	220
18. Разрывные решения краевой задачи типа Дирихле	240
19. Дифференциальные игры на оптимум времени	259

20. Кусочно-линейные приближения минимаксных решений для уравнений Гамильтона – Якоби . . . . .	274
<b>Приложение . . . . .</b>	<b>284</b>
A1. Доказательство классического метода характеристик . . . . .	284
A2. Многозначные отображения . . . . .	287
A3. Полунепрерывные функции . . . . .	289
A4. Выпуклые функции . . . . .	290
A5. Контингентные конусы, производные по направлениям, субдифференциалы . . . . .	291
A6. Об одном свойстве субдифференциалов . . . . .	298
A7. Дифференциальные включения . . . . .	302
A8. Критерии слабой инвариантности . . . . .	305
<b>Литература . . . . .</b>	<b>315</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>334</b>