

УДК 512.77+517.912+517.958

Интернет-магазин  
**MAHESIS**

<http://shop.rcd.ru>

- физика
- математика
- биология
- нефтегазовые технологии

**Бененти С.**

Гамильтоновы структуры и производящие семейства. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2009. — 280 с.

Монография активно работающего итальянского математика посвящена современной симплектической геометрии. Основной акцент сделан на приложения современного математического аппарата симплектической геометрии и топологии в геометрической оптике, термодинамике и теории управления. Изложение отличается высоким уровнем математической строгости.

Для студентов и аспирантов физико-математических специальностей университетов, специалистов.

**ISBN 978-5-93972-775-4**

© С. Бененти, 2009

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

# Оглавление

<b>Предисловие редактора перевода . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>Предисловие . . . . .</b>	<b>7</b>
<b>ГЛАВА 1. Многообразия. Основные понятия . . . . .</b>	<b>10</b>
1.1. Касательные вектора и касательные расслоения . . . . .	10
1.2. Касательный функтор . . . . .	13
1.3. Особые отображения . . . . .	14
1.4. Подмногообразия . . . . .	15
1.5. Векторные поля . . . . .	17
1.6. Интегральные кривые и потоки . . . . .	18
1.7. Первые интегралы . . . . .	20
1.8. Скобка Ли . . . . .	21
1.9. 1-формы . . . . .	22
1.10. Внешние формы . . . . .	23
1.11. Внешняя алгебра . . . . .	24
1.12. Поднятие форм . . . . .	25
1.13. Производные . . . . .	26
1.14. Дифференциал . . . . .	27
1.15. Внутреннее произведение . . . . .	29
1.16. Производная Ли . . . . .	29
<b>ГЛАВА 2. Симплектические многообразия и симплектические со- отношения . . . . .</b>	<b>31</b>
2.1. Симплектические многообразия . . . . .	31
2.2. Симплектические векторные пространства . . . . .	34
2.3. Особые подмногообразия . . . . .	36
2.4. Характеристическое расслоение коизотропного подмногооб- разия . . . . .	39
2.5. Отношения . . . . .	42
2.6. Симплектические отношения . . . . .	44
2.7. Линейные симплектические отношения . . . . .	46
2.8. Симплектические редукции . . . . .	48

2.9. Симплектические отношения, порожденные коизотропным подмногообразием . . . . .	53
2.10. Симплектическая формулировка задачи Коши . . . . .	58
2.11. Изоморфизм симплектических редукций . . . . .	60
<b>ГЛАВА 3. Симплектические отношения на кокасательных расслоениях . . . . .</b>	<b>62</b>
3.1. Кокасательные расслоения . . . . .	62
3.2. 1-формы как сечения кокасательных расслоений . . . . .	64
3.3. Каноническая симплектическая структура кокасательного расслоения . . . . .	65
3.4. Лагранжевы сингулярности и каустики . . . . .	68
3.4.1. Параметрические уравнения . . . . .	70
3.4.2. Неявные уравнения . . . . .	71
3.4.3. Производящие функции . . . . .	72
3.5. Производящие семейства . . . . .	73
3.6. Производящие семейства симплектических отношений . . . . .	82
3.7. Композиция производящих семейств . . . . .	84
3.8. Каноническое поднятие подмногообразий . . . . .	86
3.9. Каноническое поднятие отношений . . . . .	89
<b>ГЛАВА 4. Геометрия уравнения Гамильтона–Якоби . . . . .</b>	<b>91</b>
4.1. Уравнение Гамильтона–Якоби . . . . .	91
4.2. Характеристики и лучи . . . . .	96
4.3. Системы лучей и волновые фронты . . . . .	98
4.4. Главная функция Гамильтона . . . . .	101
4.5. Теорема Якоби . . . . .	105
4.6. От полного интеграла к главной функции Гамильтона . . . . .	109
4.7. Источники, зеркала, линзы . . . . .	112
<b>ГЛАВА 5. Гамильтонова оптика в евклидовых пространствах . . . . .</b>	<b>119</b>
5.1. Функция расстояния . . . . .	119
5.2. От волновой оптики к геометрической . . . . .	127
5.3. Глобальная главная функция Гамильтона для уравнения эйконала . . . . .	130
5.4. Глобальная главная функция Гамильтона на пространстве постоянной отрицательной кривизны . . . . .	145
<b>ГЛАВА 6. Управление статическими системами . . . . .</b>	<b>153</b>
6.1. Управляющее отношение . . . . .	153
6.2. Простые замкнутые термостатические системы . . . . .	173

6.3.	Внутренняя энергия . . . . .	175
6.4.	Идеальный газ . . . . .	177
6.5.	Газ Ван дер Ваальса . . . . .	182
6.6.	Методы управления . . . . .	186
6.7.	Преобразование Лежандра . . . . .	188
6.8.	Термостатические потенциалы . . . . .	191
6.9.	Переход от внутренней энергии к свободной . . . . .	196
6.10.	Простые открытые термостатические системы . . . . .	199
6.11.	Составные термостатические системы . . . . .	202
<b>ГЛАВА 7. Вспомогательные справочные материалы . . . . .</b>		<b>214</b>
7.1.	Симплектические отношения, порожденные подмногообразием . . . . .	214
7.2.	Каноническое поднятие редукций и диффеоморфизмов . . . . .	216
7.3.	Основные наблюдаемые . . . . .	217
7.4.	Каноническое поднятие векторных полей . . . . .	218
7.5.	Регулярные распределения и теорема Фробениуса . . . . .	220
7.6.	Точные лагранжевы подмногообразия . . . . .	225
7.7.	Отношения дуальности . . . . .	230
7.8.	Лагранжевы разложения и канонический базис . . . . .	236
7.9.	Каноническая симплектическая структура на комплексных проективных пространствах . . . . .	240
<b>ГЛАВА 8. Глобальные главные функции Гамильтона для уравнений эйконала на <math>\mathbb{S}_2</math> и <math>\mathbb{H}_2</math> . . . . .</b>		<b>242</b>
8.1.	Векторное исчисление в вещественном трехмерном пространстве . . . . .	242
8.1.1.	Метрический тензор и скалярное произведение . . . . .	242
8.1.2.	Форма объема . . . . .	244
8.1.3.	Векторное произведение . . . . .	245
8.1.4.	Вращения . . . . .	246
8.1.5.	Стандартная симплектическая структура на ориентируемой поверхности . . . . .	248
8.1.6.	Скобка Пуассона для функций особого вида . . . . .	251
8.2.	Главная функция Гамильтона на $\mathbb{S}_2$ . . . . .	252
8.3.	Главная функция Гамильтона на $\mathbb{H}_2$ . . . . .	258
<b>Предметный указатель . . . . .</b>		<b>273</b>