

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебно-методическое пособие

Составители:
И.В. Михайлова,
Л.Н. Баркова

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2014

1. Элементы комбинаторики

Центральной задачей комбинаторной теории (комбинаторики) можно считать задачу размещения (распределения) объектов в соответствии со специальными правилами. Если эти правила просты, то основным в этой задаче является подсчет числа возможностей для осуществления искомого размещения. Задачи такого типа принято называть *задачами перечисления*. Если же правила распределения объектов сложны, то главной проблемой становится вопрос существования таких распределений и нахождения методов их осуществления.

Нас будут интересовать только перечислительные задачи. В том случае, когда интересующих нас вариантов размещения немного, мы можем все эти варианты перебрать. В других случаях это невозможно из-за большого числа вариантов и тогда на помощь приходят основные правила подсчета: принципы (правила) сложения и умножения.

Принцип суммы. Пусть множество A содержит n элементов, а множество B – k элементов, причем $A \cap B = \emptyset$. Тогда множество $A \cup B$ содержит $n + k$ элементов.

Замечание 1. Если обозначить $|A|$ – число элементов множества A , то в формализованном виде правило суммы можно сформулировать следующим образом: если $|A| < \infty, |B| < \infty, A \cap B = \emptyset$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Замечание 2. При решении задач удобной бывает следующая формулировка: элемент из A или элемент из B можно выбрать $n + k$ числом способов, где n – количество способов выбрать элемент из A , k – элемент из B .

Принцип произведения. Пусть заданы два множества $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \dots, b_k\}$. Тогда декартово произведение

$C = A \times B = \{(a_i, b_j) : a_i \in A, i = 1, \dots, n; b_j \in B, j = 1, \dots, k\}$ содержит nk элементов, т.е. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, если $|A| < \infty, |B| < \infty$.

Подводя итог сказанному, подчеркнем, что если выбирается или то или другое, то нужно применять правило суммы, а если и то, и другое, то правило произведения. Например, на тарелке лежат 5 яблок и 3 груши. Если выбираем яблоко или грушу, то число способов $5+3=8$. Если выбираем и яблоко, и грушу, то $5 \cdot 3 = 15$.

Замечание 3. Пусть необходимо выполнить одно за другим какие-то r действий ($r \geq 2$). Если первое действие можно выполнить n_1 способами, после чего второе n_2 способами, после чего и т.д. r -ое действие можно выполнить n_r способами, то все r действий можно выполнить $n_1 \cdot n_2 \dots n_r$ способами.

Замечание 4. Если на выполнение какого-либо из действий наложены ограничения (т.е. некоторое действие необходимо выполнить по-особому,

вершинами в этих точках? Сколько выпуклых пятиугольников, выпуклых десятиугольников?

2. Даны три карточки с цифрами 1,2,3. Сколько чисел можно составить из этих трех карточек?

3. Десять спортсменов разыгрывают золотую, серебряную и бронзовую медали. Сколькими способами эти медали могут быть распределены между спортсменами?

4. Сколькими способами n девушек могут образовать хор?

5. Сколькими способами r различных шаров можно разместить по n различным ячейкам, предполагая, что а) в ячейке может быть более одного шара; в) не может быть более одного шара.

6. Сколько различных подмножеств, включая само множество и пустое, можно выделить из множества, содержащего n элементов.

7. В розыгрыше лотереи участвуют $n = 3$ человека. Каждому из них присвоен порядковый номер. Участники лотереи должны вытащить одну карточку из трех с номерами 1,2,3. Призы выдаются тем, кто вытащит карточку со своим порядковым номером. Каково число вариантов, в которых выигрыш только у одного участника лотереи? Сколько случаев, когда ни один не выигрывает? Ответить на вопросы для произвольного $n = 2,3,4,\dots$

8. Сколько пятибуквенных слов (перестановок), каждое из которых состоит из трех согласных и двух гласных, можно образовать из букв слова УРАВНЕНИЕ.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СЛУЧАЙНОГО ОПЫТА

Пусть G – некоторый случайный опыт, обладающий *свойством устойчивости частот*, т.е.

– опыт, результаты которого не могут быть предсказаны однозначно до проведения испытаний;

– возможны повторения испытания с первоначальным комплексом исходных данных сколь угодно большое число раз;

– невозможно точное предсказание результата не только первого испытания, но и каждого последующего;

– при неограниченном увеличении количества проведенных испытаний частота любого исхода стабилизируется, т.е. в определенном смысле близка к некоторой постоянной, называемой в дальнейшем вероятностью исхода.

Математическая модель такого случайного опыта G называется *вероятностным пространством* и обозначается $\langle \Omega, A, P \rangle$. Сокращенно: $G \sim \langle \Omega, A, P \rangle$, где

Ω – множество исходов опыта G ;

A – множество случайных событий, наблюдаемых в опыте G (класс подмножеств Ω , называемый алгеброй или σ -алгеброй);

P – вероятность случайных событий (вероятностная мера на измеримом пространстве (Ω, \mathcal{A})). Связь вероятностной и теоретико-множественной терминологии отражена в таблице 1.

2.1. Алгебра событий. Рассмотрим случайный опыт G , множество исходов которого Ω конечно. В такой модели событием назовем любое подмножество Ω .

Пример. Случайный опыт G – выбор наудачу одной кости из полного набора костей домино. Приведем возможные математические модели данного опыта.

Модель 1.

$$\Omega = \{(i, j) : i, j = \overline{0;6}, i \leq j\}.$$

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\max}$ – совокупность всех подмножеств Ω .

$$P : P(i, j) = \frac{1}{28}, (i, j) \in \Omega \text{ (о вероятности см. ниже).}$$

Модель 2.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, где ω_1 означает, что выбран дубль, а ω_2 – не дубль.

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\max} = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}\}$, где \emptyset – невозможное событие; Ω – достоверное событие.

$$P : P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0, P(\omega_1) = ?, P(\omega_2) = ?$$

Рассмотрим несколько возможных результатов опыта G :

1) A – выбран дубль.

2) B – сумма очков на выбранной кости равна 6.

В первой модели $A = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$;

$B = \{(0,6), (1,5), (2,4), (3,3)\}$.

Во второй модели $A = \{\omega_1\}$ – элементарное событие, B – не является событием, так как при появлении любого из исходов ω_1 или ω_2 мы не можем сказать, осуществляется или нет результат B .

Вернемся к наиболее содержательной первой модели. Так как события в модели являются подмножествами, то к ним можно применять все теоретико-множественные операции. Например,

$B \setminus A = \{(0,6), (1,5), (2,4)\}$, $A \cap B = \{(3,3)\}$, $A \cup B = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (0,6), (1,5), (2,4)\}$, $\bar{A} = \Omega \setminus A$ – не дубль.

Задачи для самостоятельного решения

1. Мишень состоит из десяти кругов, ограниченных концентрическими окружностями с радиусами $r_1 < r_2 \dots < r_{10}$. Событие A_k – попадание в круг радиуса r_k при одном выстреле по мишени. Описать множество исходов данного опыта. Что означают события $B = \bigcup_{k=1}^6 A_k$, $C = \bigcap_{k=1}^{10} A_k$, $E = \bar{A}_1 \cap A_2$, $D = (A_5 \cup A_6) \setminus (A_5 \cap A_6)$.

2. Электрическая цепь состоит из n элементов. Пусть событие A означает, что цепь безотказно работает в течение контрольного промежутка времени, а события A_i – то же для i -го элемента, $i = \overline{1, n}$.

А. Выразить событие A и \overline{A} через события $A_i, i = \overline{1, n}$ для цепей с параллельным и последовательным соединением элементов.

В. Выразить через A_i следующие события: B – отказали все элементы, C – отказал хотя бы один элемент, D – безотказно работал один и только один из элементов, E – отказали только два элемента..

3. Случайный опыт – испытание трех приборов. События: A – хотя бы один из трех проверяемых приборов бракованный; B – все приборы доброкачественные. Что означают события а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \setminus B$; г) $B \setminus A$.

4. Опыт состоит в однократном бросании игральной кости. Описать возможные для данного опыта множества исходов. В каждой из предложенных моделей указать события: A – число очков, выпавших на верхней грани игральной кости, кратно трем; B – на верхней грани выпало нечетное число очков; C – число очков больше трех; D – число очков меньше семи; E – число очков 0,5; F – число очков от 0,5 до 1,5. Установить пары совместных событий. Описать события $\overline{B}, \overline{C}, A \cap B, A \setminus B, E \cup D, E \cap F$.

5. Пусть A и B – произвольные события, наблюдаемые в опыте G .

Проверить следующие равенства

$$a) (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A;$$

$$b) (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A \cap B}) = A \cap B.$$

6. Пусть число исходов равно $n < \infty$. Указать минимальное и максимальное возможные значения для числа всех случайных событий.

7. Может ли быть : а) число исходов конечно, а число всех случайных событий бесконечно; б) число всех случайных событий конечно, а число исходов бесконечно; в) число исходов больше, чем число всех событий?

В последующих пунктах мы рассмотрим примеры вероятностных пространств $\langle \Omega, A, P \rangle$, объединенных интуитивным понятием равновозможности результатов опыта.

2.2. Классическая схема (модель). Рассмотрим опыт G , число возможных исходов которого конечно $|\Omega| < \infty$ и все исходы равновозможны, т.е. непредпочтительны друг перед другом или имеют одинаковые шансы к появлению. Тогда

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \quad A \subset \Omega.$$

Обратимся к примеру п.2.1. В первой модели вероятность того, что выбранная наудачу кость окажется дублем, равна $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$,