МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Т.И. Смагина

ПРОЕКЦИОННО-ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ

Учебное пособие

Воронеж
2016

Проекционно-вариационные методы в прикладных задачах

Введение. Математические модели содержательных прикладных задач могут быть различными (краевые или начальные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, интегральные и алгебраические уравнения и т.п.). Методы функционального анализа позволяют рассматривать их как операторные уравнения в соответствующих функциональных пространствах и, следовательно, исследовать эти модели с единых позиций. По существу, любая задача, для которой можно выписать определяющие уравнения, может быть исследована и решена с помощью одной из разновидностей метода моментов либо вариационных методов, которые и изучаются в настоящем пособии.

Изложение материала имеет трёхуровневую структуру. Первый, поверхностный, уровень содержит расчётные формулы конкретных методов для нахождения приближённых решений абстрактных уравнений. Второй, более глубокий, уровень позволяет исследовать сходимость приближённых решений к точному. На третьем уровне выясняются условия устойчивости вычислительных схем.

Необходимые для усвоения курса основы функционального анализа даются в главе I, а также в случае необходимости, в начале других глав. Пособие содержит подборку задач, которые предлагаются для решения на практических занятиях. Подробно разбираются примеры решения некоторых из них.

Сведения о пространствввах Лебега вынесены в приложение I. В приложении II приведён алгоритм выполнения лабораторной работы, а в приложении III дан образец оформления лабораторной работы.

Для удобства пользования пособием конец доказательства утверждений отмечается значком $\square$.

В списке литературы приводятся использованные при написании данного пособия источники $[1-7]$. Они же рекомендуются для самостоятельного более глубокого изучения предмета.

Глава I. Гильбертовы пространства и линейные операторы

1.1. Гильбертовы пространства. Векторное пространство H над полем комплексных чисел называется *предгильбертовым*, если для любых $x, y \in H$ определено число (x, y), называемое *скалярным произведением*, так что выполнены следующие аксиомы:

1)$(x,x) \geq 0, \quad (x,x) = 0 \iff x = 0,$

2) $(x,y) = \overline{(y,x)},$

3) $(\alpha x, y) = \alpha(x,y),$

Теорема 1.1 (о разложении гильбертова пространства в прямую сумму двух подпространств). *Пусть L - подпространство в гильбертовом пространстве H. Тогда любой элемент $x \in H$ представим единственным образом в виде*

$$x = y + z, \quad \text{где} \quad y \in L, \quad z \perp L. \tag{1.2}$$

При этом говорят, что y есть *проекция элемента x на подпространство L* и обозначают $y = Pr_L x$.

Теорема 1.2 (о проекции на конечномерное подпространство). *Пусть $L = \mathcal{L}(e_1, ..., e_n)$– подпространство в H, где $e_1, ..., e_n$ – ортонормированный базис в L. Тогда ортогональная проекция элемента $x \in H$ на подпространство L имеет вид*

$$Pr_L x = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k.$$

Упражнения

1. Вычислить скалярное произведение (x, y) в $L_2[0, \pi]$, если: a) $x = \cos t$, $y = \sin^2 t$; b) $x = t,\ y = e^t$; c) $x = t^3,\ y = t^2$. Вычислить $\|x\|$.

2. Вычислить $\|x\|$ для $x \in C[0, 1]$, если: a) $x = \cos t$; b) $x = 2t^2$; c) $x = e^t$.

3. Найти проекцию в $L_2[0, 1]$ элемента $x = e^t$ на подпространство многочленов степени 2.

4. Проверить, что система функций $\{e^{2int},\ n \in \mathbb{Z}\}$ образует ортогональную систему в комплексном пространстве $L_2[0, 1]$.

5. Проверить, что система функций 1, $\cos \pi nt$, $\sin \pi nt$, $n \in \mathbb{N}$, образует ортогональную систему в пространстве $L_2[-1, 1]$.

1.2. Линейные операторы. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ - линейные нормированные пространства над одним и тем же полем чисел $\mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Пусть существует оператор (отображение) $A : D(A) \subset X \to Y$, ставящий в соответствие элементу $x \in D(A)$ единственный элемент $y \in Y$. Множество $D(A) \subset X$ называется *областью определения* оператора A. Множество элементов вида $R(A) = \{y \in Y : y = Ax,\ x \in D(A)\}$ называется *областью значений* оператора A. Говорят, что элемент y является *образом* элемента x, а элемент x - *прообразом* элемента y.

Оператор $A : D(A) \subset X \to Y$ называется *линейным*, если:

1) $D(A)$ - линейное пространство;

2) $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2$ для всех $x_1,\ x_2 \in D(A)$ и любых скаляров $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Линейный оператор $A : X \to Y$ называют *ограниченным*, если существует такая константа $M > 0$, что для всех $x \in X$

$$\|Ax\|_Y \le M\|x\|_X. \tag{1.3}$$

Нормой $\|A\|$ оператора A называют наименьшую из констант M, для которых выполнено условие (1.3).

Замечание 1.2. *Если для всех $x \in X$ выполнено неравенство (1.3) и существует элемент x_0 такой, что $\|Ax_0\| = M\|x_0\|$, то $\|A\| = M$.*

Имеют место равенства

$$\|A\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y.$$

Замечание 1.3. *Пусть $X = \mathbb{R}^n$ - гильбертово пространство из примера 1 и A - самосопряжённая положительно определённая матрица. Тогда её собственные числа вещественные, положительные и могут быть занумерованы в порядке неубывания $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$. Можно показать, что $\|A\| = \lambda_n$.*

Оператор $A : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если $\|Ax - Ax_0\|_Y \to 0$ при $\|x - x_0\|_X \to 0$. Если линейный оператор непрерывен в одной точке, то он непрерывен во всех точках пространства и называется просто *непрерывным.* Для линейных операторов непрерывность и ограниченность эквивалентны.

Оператор ортогонального проектирования. Пусть $X = Y = H$ – гильбертово пространство и $L \subset H$ – подпространство в нём. По теореме 1.1 любой элемент $x \in H$ единственным образом можно представить в виде (1.2), т.е.

$$x = y + z, \quad \text{где} \quad y \in L, \quad z \perp L.$$

Ортогональным проектором (ортопроектором) на подпространство $L \subset H$ называется отображение $P : H \to L$, ставящее в соответствие элементу x его ортогональную проекцию, т.е. ортопроектор определяется соотношением $Px = y$, где $y = Pr_L x$. Отметим некоторые свойства ортопроектора P

1. P - линейный ограниченный оператор и $\|P\| = 1$;
2. $Py = y$ для $y \in L$;
3. $P^2 = P$;
4. P - самосопряжённый оператор, т.е. $(Px_1, x_2) = (x_1, Px_2)$.

Обратный оператор. Пусть линейный оператор $A : D(A) \subset X \to Y$ переводит $D(A)$ в $R(A)$ взаимнооднозначно. Тогда существует *обратный оператор* $A^{-1} : R(A) \to D(A)$, действующий по правилу $A^{-1}y = x$, где y и x связаны соотношением $y = Ax$. Оператор A^{-1} также является линейным.

Теорема 1.3. *Оператор A переводит $D(A)$ в $R(A)$ взаимнооднозначно тогда и только тогда, когда его ядро $KerA = \{x \in D(A) : Ax = 0\}$ состоит только из нулевого элемента.*

Обратный к линейному ограниченному оператору может не быть ограниченным оператором. Говорят, что линейный оператор A *непрерывно обратим,* если $R(A) = Y$, оператор A обратим и A^{-1} является ограниченным оператором.

Теорема 1.4 (Банаха). *Если A – линейный ограниченный оператор, отображающий взаимнооднозначно банахово пространство X на банахово пространство Y, то обратный оператор A^{-1} ограничен.*

Иными словами, оператор A непрерывно обратим, если выполнены два условия: 1) $KerA = \{0\}$ и 2) $R(A) = Y$.

С точки зрения разрешимости уравнения $Ax = y$ непрерывная обратимость оператора A означает, что это уравнение имеет единственное решение $x = A^{-1}y$ для любой правой части $y \in Y$.

Замечание 1.4. *Если существует линейный ограниченный оператор B такой, что $BA = AB = I$, то $B = A^{-1}$.*

Теорема 1.5. *Если A – линейный ограниченный оператор и $\|A\| = q < 1$, то оператор $I - A$ непрерывно обратим, причём*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} A^k \tag{1.4}$$

и справедлива оценка

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq (1 - q)^{-1}. \tag{1.5}$$

Доказательство. Ряд в (1.4) сходится, так как его общий член оценивается $\|A^k\| \leq q^k$ через общий член сходящегося ряда. Обозначим через B сумму этого ряда: $B = \sum_{k=1}^{\infty} A^k$. Легко проверить, что

$$B(I - A) = \sum_{k=1}^{\infty} A^k(I - A) = I, \; (I - A)B = \sum_{k=1}^{\infty}(I - A)A^k = I.$$

Т.о., $B = (I - A)^{-1}$. Наконец,

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|A\|^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} q^k = (1 - q)^{-1}.\Box$$

Ряд (1.4) называется рядом Неймана.

Пример 1. Пусть φ - непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция. Рассмотрим отображение $A : C[a, b] \to C[a, b]$, определяемое соотношением

$$(Ax)(t) = \varphi(t)x(t).$$

Доказать, что A - линейный ограниченный оператор и найти его норму.

Решение. Линейность оператора следует из соотношения

$$(A(\alpha x + \beta y))(t) = \varphi(t)(\alpha x(t) + \beta y(t)) = \alpha(Ax)(t) + \beta(Ay)(t).$$

Покажем, что A - ограниченный оператор. Имеем

$$\|Ax\|_C = \max_{t\in[a,b]} |(Ax)(t)| = \max_{t\in[a,b]} |\varphi(t)x(t)| \le \|\varphi\|_C \|x\|_C,$$

поэтому $\|A\|_C \le \|\varphi\|_C$.

Докажем, что $\|A\| = \|\varphi\|_C$. Рассмотрим функцию $x_0(t) \equiv 1$. Очевидно, что $\|x_0\|_C = 1$ и $\|Ax_0\|_C = \max\limits_{t\in[a,b]} |\varphi(t)| = \|\varphi\|_C$. Таким образом, $\|A\| = \|\varphi\|_C$.

Пример 2. Доказать ограниченность и найти норму оператора $(Ax)(t) = \int_0^1 t^2 sx(s)\, ds$ если: a) $A : C[0, 1] \to C[0, 1]$, b) $A : L_2[0, 1] \to C[0, 1]$.

Решение. В случае a) имеем оценку

$$\|Ax\|_C = \max_{t\in[0,1]} \left| t^2 \int_0^1 sx(s)\, ds \right| \le \int_0^1 s|x(s)|\, ds \le \frac{1}{2}\|x\|_C.$$

Следовательно, $\|A\| \le 1/2$. Очевидно, что для $x_0(t) \equiv 1$ выполнено равенство $\|Ax_0\|_C = \|x_0\|_C/2$ и поэтому $\|A\| = 1/2$.

В случае b) заметим, что если $x \in L_2[a, b]$, то $x \in L_1[a, b]$ и $Ax(t)$ - непрерывная функция. Установим оценку (1.3). Пользуясь неравенством Шварца, получаем

$$\|Ax\|_C = \left| \int_0^1 sx(s)\, ds \right| \le \left(\int_0^1 s^2\, ds \right)^{1/2} \|x\|_{L_2} \le \frac{1}{\sqrt{3}}\|x\|_{L_2}.$$

Т. о., $\|A\| \le 1/\sqrt{3}$. Так как знак равенства в неравенстве Шварца достигается, когда сомножители линейно зависимы, то выберем $x_0(t) = t$. Получим

$$\|Ax_0\|_C = \int_0^1 sx(s)\, ds = \int_0^1 s^2\, ds = \frac{1}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\|x_0\|_{L_2}.$$

Следовательно, $\|A\| = 1/\sqrt{3}$.

Пример 3. Является ли ограниченным оператор дифференцирования $Ax(t) = x'(t)$, если:

a) $A : D(A) \subset C[0,1] \to C[0,1]$, где $D(A) = C^1[0,1]$?

b)$A : C^1[0,1] \to C[0,1]$?

Решение. В случае a) покажем, что для любого $M > 0$ найдется $x \in D(A)$ такой, что $\|Ax\|_C > M\|x\|_C$. Действительно, пусть задано произвольное число $M > 0$. Возьмем $n > M$ и $x(t) = \sin nt$. Тогда $\|x\|_C = 1$ и

$$\|Ax\|_C = \max_t |Ax(t)| = \max_t |n \cos nt| = n > M,$$

что доказывает неограниченность оператора A.

В случае b) оператор дифференцирования будет ограниченным, т. к. имеет место оценка $\|Ax\|_C \leq M\|x\|_{C^1}$. Действительно, зададим норму в $C^1[0,1]$ формулой $\|x\|_{C^1} = \max\{\|x\|_C, \|x'\|_C\}$. Тогда $\|Ax\|_C = \|x'\| \leq \|x\|_{C^1}$. Отсюда $\|A\| \leq 1$. Для $x_0(t) = t$ имеем $\|x_0\|_{C^1} = 1$ и $\|Ax_0\|_C = \|x_0'\|_C = 1$. Поэтому $\|A\| = 1$.

2) пусть $\|x\|_1 = \|x\|_C + \|x'\|_C$. Тогда имеет место такая же оценка

$$\|Ax\|_C = \|x'\|_C \leq \|x\|_C + \|x'\|_C = \|x\|_1 \tag{1.6}$$

и $\|A\| \leq 1$. Однако в этом случае не существует элемента $x_0 \neq 0$, на котором бы в (1.6) достигалось равенство.

Задачи

Доказать линейность, ограниченность и найти норму оператора:

1) $(Ax)t) = x(0) + tx(1), \quad A : C[0,1] \to C[0,1]$;

2) $(Ax)(t) = tx(t), \quad$ а) $A : C[0,1] \to C[0,1]$;

3) $(Ax)(t) = \sin t\, x(t), \quad$ а) $A : C[0,1] \to C[0,1]$; б) $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$;

4) $(Ax)(t) = \int_0^1 e^{t-s} x(s)\, ds; \quad$ 5) $(Ax)t) = \int_0^1 tsx(s)\, ds$;

В пунктах 4) - 5) рассмотреть случаи:

а) $A : C[0,1] \to C[0,1], \quad$ б) $A : L_2[0,1] \to C[0,1], \quad$.

Глава II. Проекционные методы

2.1. Метод моментов. Пусть H, Y – гильбертовы пространства, $A : D(A) \subset H \to Y$ – линейный оператор.

Рассмотрим уравнение

$$Ax = f. \tag{2.1}$$

Будем предполагать, что A непрерывно обратим, так что уравнение (2.1) имеет единственное решение. Нас будут интересовать приближённые методы нахождения этого решения.