УДК 533.951+517.948

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В КВАЗИНЕЙТРАЛЬНОЙ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

А. К. Хе, А. А. Чесноков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mail: chesnokov@hydro.nsc.ru

Для нелинейного кинетического уравнения, описывающего одномерное движение квазинейтральной бесстолкновительной плазмы, определены скорости распространения возмущений и сформулированы условия обобщенной гиперболичности. В классе бегущих волн построены и физически интерпретированы точные (в том числе периодические) решения модели. Предложены дифференциальные законы сохранения, аппроксимирующие исходное интегродифференциальное уравнение. На основе этих законов выполнены численные расчеты распространения волн, показывающие возможность кинетического опрокидывания функции распределения.

Ключевые слова: квазинейтральная плазма, интегродифференциальные уравнения, гиперболичность, нелинейные волны, законы сохранения.

1. Математическая модель. При моделировании течений плазмы квазинейтральное приближение является аналогом теории длинных волн. Такое приближение применяется при рассмотрении движений с характерными размерами, существенно превышающими дебаевский радиус R_D. Параметр R_D определяет максимальный масштаб разделения зарядов в плазме: при бóльших по сравнению с величиной R_D смещениях электронов движение частиц под действием электрического поля приводит к быстрому восстановлению нейтральности. В одномерном случае в отсутствие магнитного поля уравнение движения квазинейтральной бесстолкновительной плазмы имеет вид [1]

$$\frac{\partial f^1}{\partial t} + u\,\frac{\partial f^1}{\partial x} - \frac{e}{M_i}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\frac{\partial f^1}{\partial u} = 0, \qquad \varphi = \frac{T_e}{e}\ln\Big(\frac{1}{N_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^1\,du\Big). \tag{1}$$

Здесь $f^1(t,x,u)$ — функция распределения ионов; x, t — пространственная координата и время; $\varphi(t,x)$ — потенциал электрического поля; u, M_i — скорость и масса ионов; e, T_e — заряд и температура электронов; N_0 — плотность невозмущенной плазмы. Функция распределения электронов считается равновесной функцией Максвелла — Больцмана. Величины M_i, e, T_e, N_0 — заданные положительные постоянные.

В работе [1] исследованы автомодельные движения квазинейтральной разреженной плазмы, изучено явление ускорения ионов при свободном расширении плазмы и установле-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-00338) и Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (грант № МК-4417.2009.1), а также в рамках Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (контракт № 02.740.11.0617) и Интеграционного проекта СО РАН № 65.

на возможность кинетического опрокидывания функции распределения для решений типа простых волн и волн гидродинамического типа.

Далее рассматриваются решения уравнения (1) в классе кусочно-непрерывных по переменной u функций с ограниченным носителем

$$f^1(t,x,u) = f(t,x,u)[\theta(u - v_0(t,x)) - \theta(u - v_1(t,x))], \tag{2}$$

где θ — функция Хевисайда; $v_0(t,x)$, $v_1(t,x)$ — границы интервала по переменной u, вне которого функция распределения $f^1(t,x,u)$ тождественно равна нулю; $f(t,x,u)$ — положительная непрерывно дифференцируемая на множестве $\{(t,x,u)\colon t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R},\ u \in [v_0, v_1]\}$ функция. Подставляя представление решения (2) в кинетическое уравнение (1), получаем интегродифференциальную систему уравнений для определения величин $f(t,x,u)$, $v_0(t,x)$ и $v_1(t,x)$:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial f}{\partial t} + u\,\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{b}{n}\,\frac{\partial n}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial u} = 0, \qquad n = \int\limits_{v_0}^{v_1} f\,du \quad \Big(b = \frac{T_e}{M_i}\Big),
\\
\frac{\partial v_0}{\partial t} + v_0\,\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{b}{n}\,\frac{\partial n}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1\,\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{b}{n}\,\frac{\partial n}{\partial x} = 0.
\end{gathered} \tag{3}$$

Для исследования свойств кинетической модели (3) целесообразно использовать полулагранжевы переменные x, λ, переход к которым осуществляется с помощью замены переменных [2, 3]

$$u = u(t,x,\lambda), \qquad \bar f(t,x,\lambda) = f(t,x,u(t,x,\lambda)), \qquad \lambda \in [0,1],$$

где функция $u(t,x,\lambda)$ — решение задачи Коши

$$u_t + uu_x = -bn^{-1}n_x, \qquad u\big|_{t=0} = u^0(x,\lambda).$$

Предполагается выполненным неравенство $u_\lambda > 0$, обеспечивающее обратимость замены переменных. При $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ функция $u(t,u,\lambda)$ принимает значения $v_0(t,x)$ и $v_1(t,x)$ соответственно. В результате для определения новых искомых функций $u(t,x,\lambda)$ и $H(t,x,\lambda) = u_\lambda \bar f$ получаем интегродифференциальную систему уравнений

$$u_t + uu_x + \frac{b}{n}\int\limits_0^1 H_x\,d\lambda = 0, \qquad H_t + (uH)_x = 0, \qquad n = \int\limits_0^1 H\,d\lambda. \tag{4}$$

Ниже на основе предложенного в [4] подхода найдены обобщенные характеристики уравнений (4) и сформулированы условия их гиперболичности.

Следует отметить еще одну возможную интерпретацию модели (3). Как известно, между кинетическим уравнением Власова и уравнениями Бенни [5], описывающими распространение длинных волн на мелкой воде, имеется аналогия [2]. В работе [6] выведена и исследована приближенная гидродинамическая модель плоскопараллельного сдвигового течения идеальной жидкости в канале большой протяженности с упругой стенкой

$$u_t + uu_x + vu_y + (p(h))_x = 0, \qquad h_t + \Big(\int\limits_0^h u\,dy\Big)_x = 0, \qquad v = -\int\limits_0^y u_x\,dy. \tag{5}$$

Здесь $u(t,x,y)$, $v(t,x,y)$ — горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости; уравнениями $y = 0$ и $y = h(t,x)$ задаются стенки канала; замыкающее соотношение $p = p(h)$ определяет упругие свойства верхней стенки. Используются различные варианты