

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Кафедра дискретного анализа

РЯДЫ И ИНТЕГРАЛЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Часть 2

Ярославль 2004

ББК В 161.55я73

Р 98

УДК 517

Составители Л.А. Зафиевская, Г.В. Шабаршина

Ряды и интегралы в комплексной плоскости. Ч. 2: Метод. указания / Сост. Л.А. Зафиевская, Г.В. Шабаршина; Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2004. 19 с.

Вторая часть методических указаний посвящена изучению применения теории вычетов к вычислению интегралов. Ее цель – научить студентов вычислению интегралов в комплексной плоскости. В качестве приложения теории вычетов рассматривается вычисление интегралов от функции действительного переменного.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по специальностям 010200 Прикладная математика и информатика (дисциплина "Математический анализ", блок ЕН) и 010100 Математика (дисциплина "Теория функций комплексного переменного", блок ОПД), очной формы обучения.

Рецензент – кафедра математического анализа Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова

© Ярославский государственный университет, 2004

© Л.А. Зафиевская, Г.В. Шабаршина, 2004

1. Вычеты

Если a – изолированная особая точка функции $f(z)$ и $a \neq \infty$, то *вычетом* $f(z)$ в точке a называется число

$$\operatorname{res}[f(z), a] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z-a|=r\}} f(z) dz,$$

где r – достаточно мало (при положительном обходе окружности).

Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке ∞ называется число $\operatorname{res}[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z|=R\}} f(z) dz$, где $R > 0$ достаточно

велико (при обходе окружности $|z|=R$ по часовой стрелке).

Если $a \neq \infty$ и a – устранимая особая точка, то вычет в этой точке равен 0. После доопределения $f(z)$ в точке a она становится аналитической в круге $|z-a| \leq r$ и по теореме Коши $\int_{\{|z-a|=r\}} f(z) dz = 0$.

Если же устранимая особенность в ∞ , то вычет в этой точке может быть не равен 0.

Пример 1.1. $f(z) = \frac{1}{z}$, $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0$, т. е. $z = \infty$ устранимая точка.

Но $\operatorname{res}[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z|=R\}} \frac{1}{z} dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\varphi} d\varphi}{e^{i\varphi}} = -1$ (минус за счет обхода окружности по часовой стрелке).

Если a – изолированная особенность функции $f(z)$, то в кольце $0 < |z-a| < r$, или если $a = \infty$, то для $a = |z| > R$ ее можно разложить в ряд Лорана, при этом

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z-a|=r\}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \text{ или } c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z|=R\}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz. \quad (1)$$

В частности,

$$c_{-1} = \operatorname{res}[f(z), a] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\{|z-a|=r\}} f(z) dz = \operatorname{res}[f(z), a],$$

$$-c_{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\{|z|=R\}} f(z) dz = \operatorname{res}[f(z), \infty]$$
(2)

В последней формуле минус возникает за счет того, что при обходе контура против часовой стрелки ограничиваемая им область находится справа.

Формулы (2) позволяют вычислять вычеты, если удалось разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точки a . При этом нас будет интересовать в этом разложении только один коэффициент c_{-1} . Это сильно упрощает задачу.

Пример 1.2. Вычислить вычет в точке $a = 0$ функции $f(z) = \frac{\operatorname{ctg} z}{z^2}$.

Для этого найдем разложение этой функции в ряд Лорана в окрестности нуля. Так как $\frac{\operatorname{ctg} z}{z^2} = \frac{\cos z}{z^2 \sin z}$ и разложения $\cos z$ и $\sin z$ по степеням z известны, то применим метод неопределенных коэффициентов.

$$\frac{\operatorname{ctg} z}{z^2} = \frac{1}{z^3} \frac{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots} = \frac{1}{z^3} (d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + \dots) = \frac{d_0}{z^3} + \frac{d_1}{z^2} + \frac{d_2}{z} + d_3 + \dots$$

Следовательно, $c_{-1} = d_2$ или $\operatorname{res}[f(z), 0] = d_2$. Перемножим ряды, приведем подобные члены и приравняем коэффициенты в обеих частях. Получим $1 = d_0$, $0 = d_1$, $-\frac{1}{2} = d_2 - \frac{d_0}{3!}$. Следовательно,

$$d_2 = -\frac{1}{3}. \text{ Итак, } \operatorname{res}\left[\frac{\operatorname{ctg} z}{z^2}, 0\right] = -\frac{1}{3}.$$

При нахождении коэффициентов в ряде Лорана, построенного в окрестности полюса, можно сократить и упростить вычисления, если известен порядок полюса. Дело в том, что если $a \neq \infty$ - полюс

порядка k , то ряд Лорана содержит лишь конечное, не больше k , число отрицательных степеней $z - a$. Таким образом, ряд сразу можно искать в формуле $f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z - a)^n$. Заметим, что если порядок полюса равен $k > 1$, то $c_{-k} \neq 0$, другие же коэффициенты, в том числе и вычет c_{-1} , могут равняться 0.

Так, например, если функция $f(z) = \frac{1}{(z - a)^k}$ имеет в a полюс порядка k , то в ее лорановском разложении все $c_n = 0$, если $n \neq k$ и $c_{-k} = 1$.

Если полюс порядка 1, то вычет в этой точке всегда отличен от нуля.

Если $f(z)$ имеет полюс в ∞ , то ряд Лорана имеет вид $f(z) = \sum_{n=k}^{-\infty} c_n z^n$, при этом наибольший номер отличного от 0 коэффициента c_n называется кратностью полюса в ∞ .

Вычисление вычета путем выяснения величины c_{-1} в ряде Лорана обычно применяется, если a - существенно особая точка или определить характер особенности затруднительно. Обычно при вычислении вычета в ∞ также используют разложения в ряд Лорана.

В случае полюсов известной кратности можно воспользоваться следующими формулами:

1. Пусть $f(z)$ представима в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны в окрестности точки $a \neq o$ и $\psi(z)$ удовлетворяет условиям $\psi(a) = 0, \psi'(a) \neq 0$. Тогда

$$res[f(z), a] = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \quad (3)$$

2. Пусть $f(z)$ представима в виде $f(z) = \frac{\theta(z)}{(z - a)^m}$, $\theta(z)$ аналитична в окрестности точки a , тогда

$$res[f(z), a] = \frac{1}{(m - 1)!} \theta^{(m-1)}(a). \quad (4)$$