МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Учебно-методическое пособие для вузов

Составители:
Ф.В. Голованёва,
Е.В. Петрова

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2011

1. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве определяется заданием масштабной единицы измерения длин и трех пересекающихся в одной точке O взаимно перпендикулярных осей: Ox, Oy и Oz. Точка O – *начало координат*, Ox *– ось абсцисс,* Oy *– ось ординат,* Oz *– ось аппликат*.

Пусть M – произвольная точка пространства. Проведем через точку M три плоскости, перпендикулярные координатным осям Ox, Oy и Oz. Точки пересечения плоскостей с осями обозначим соответственно через M_x, M_y и M_z. Прямоугольными координатами точки M называются числа

$$x = OM_x, \quad y = OM_y, \quad z = OM_z,$$

т. е. величины направленных отрезков $\overline{OM_x}$, $\overline{OM_y}$, $\overline{OM_z}$; при этом x называется *абсциссой,* y *– ординатой,* z *– аппликатой* точки M. Символ $M(x;y;z)$ обозначает, что точка M имеет координаты x, y, z.

Таким образом, при выбранной системе координат каждой точке M пространства соответствует единственная упорядоченная тройка чисел $(x;y;z)$ – ее прямоугольные координаты и, наоборот, каждой упорядоченной тройке чисел $(x;y;z)$ соответствует, и притом одна, точка M в пространстве.

Плоскости Oxy, Oyz, Oxz называются *координатными плоскостями*. Они делят все пространство на восемь частей, называемых *октантами*.

Расстояние между двумя точками $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$ определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

В частности, расстояние точки $M(x;y;z)$ от начала координат O определяется по формуле

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Если отрезок, концами которого служат точки $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$, разделен точкой $C(\overline{x};\overline{y};\overline{z})$ в отношении λ, то координаты точки C определяются по формулам:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad \overline{y} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \quad \overline{z} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

В частности, координаты середины отрезка определяются по формулам:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad \overline{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad \overline{z} = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Если в общем уравнении плоскости коэффициент $D \neq 0$, то, разделив все члены уравнения на $-D$, уравнение плоскости можно привести к виду

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{4}$$

(здесь $a=-\frac{D}{A}, b=-\frac{D}{B}, c=-\frac{D}{C}$). Это уравнение называется *уравнением плоскости в отрезках*: в нем a, b, c – соответственно абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскости с осями Ox, Oy и Oz.

4. *Угол* φ *между плоскостями* $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ определяется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{5}$$

Условие параллельности плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \tag{6}$$

Условие перпендикулярности плоскостей:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \tag{7}$$

5. *Расстояние от точки* $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ *до плоскости*, определяемой уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, находится по формуле

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{8}$$

Оно равно взятому по абсолютной величине результату подстановки координат точки в нормальное уравнение плоскости; знак результата этой подстановки характеризует взаимное расположение точки и начала координат относительно данной плоскости: «плюс», если точка M_0 и начало координат расположены по разные стороны от плоскости, и «минус», если они расположены по одну сторону от плоскости.

6. *Уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ *и перпендикулярной вектору* $\mathbf{N}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$, имеет вид

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0. \tag{9}$$

При произвольных значениях A, B и C последнее уравнение определяет некоторую плоскость, принадлежащую связке плоскостей, проходящих через точку M_0. Его поэтому часто называют *уравнением связки плоскостей*.

7. Уравнение

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0 \tag{10}$$

при произвольном значении λ определяет некоторую плоскость, проходящую через прямую пересечения плоскостей

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad \text{(I)} \qquad \text{и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \qquad \text{(II)}$$

т. е. некоторую плоскость, принадлежащую пучку плоскостей, проходящих через эту прямую (в силу чего такое уравнение часто называют *уравнением пучка плоскостей*). Если плоскости, определяемые уравнениями (I) и (II), параллельны, то пучок плоскостей превращается в совокупность плоскостей, параллельных этим плоскостям.

8. *Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки* $M_1(r_1)$, $M_2(r_2)$, $M_3(r_3)$ (здесь $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$; $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$; $\mathbf{r}_3 = x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k}$), проще найти из условия компланарности векторов $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$, где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ – радиус-вектор текущей точки искомой плоскости M:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = 0,$$

или в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (11)$$

9. Если плоскость определена тремя точками (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3), то уравнение ее также примет вид

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (12)$$

Если четыре точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) и (x_4, y_4, z_4) лежат в одной плоскости, то между их координатами существует следующее соотношение:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (13)$$

Если эти четыре точки не лежат в одной плоскости, то объем тетраэдра, вершинами которого они служат, вычисляется по формуле

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}, \qquad (14)$$

причем знак в правой части выбирается так, чтобы результат получился неотрицательным ($V > 0$).

Пример 1. Уравнение плоскости $2x+3y-6z+21=0$ привести к нормальному виду.

Решение.

Находим нормирующий множитель (который берем со знаком «минус», поскольку $D=21>0$):

$$\mu=-\frac{1}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=-\frac{1}{7}.$$

Итак, нормальное уравнение заданной плоскости имеет вид

$$-\frac{2}{7}x-\frac{3}{7}y+\frac{6}{7}z-3=0.$$

Пример 2. Определить расстояние от точки $M_0\left(3;5;-8\right)$ до плоскости $6x-3y+2z-28=0$.

Решение.

Используя формулу (8) расстояния от точки до плоскости, находим

$$d=\frac{\left|6\cdot 3-3\cdot 5+2\cdot(-8)-28\right|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{41}{7}.$$

Так как результат подстановки координат точки $M_0\left(3;5;-8\right)$ в нормальное уравнение плоскости отрицателен, то $M_0\left(3;5;-8\right)$ и начало координат лежат по одну сторону от заданной плоскости.

Пример 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M\left(2;3;5\right)$ и перпендикулярной вектору $\mathbf{N}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.

Решение.

Достаточно воспользоваться уравнением (9) плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данному вектору:

$$4(x-2)+3(y-3)+2(z-5)=0,\text{ т. е. } 4x+3y+2z-27=0.$$

Пример 4. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M\left(2;3;-1\right)$ параллельно плоскости $5x-3y+2z-10=0$.

Решение.

Запишем уравнение (9) связки плоскостей, проходящих через данную точку:

$$A(x-2)+B(y-3)+C(z+1)=0.$$

Нормальный вектор искомой плоскости совпадает с нормальным вектором $\mathbf{n}=\left(5;-3;2\right)$ данной плоскости; следовательно, $A=5$, $B=-3$, $C=2$ и уравнение искомой плоскости примет вид

$$5(x-2)-3(y-3)+2(z+1)=0,\text{ или } 5x-3y+2z+1=0.$$