К ВОПРОСУ О РАССЕЯНИИ СВЕТА НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДОЙ.

Л. И. Мандельштам.

Настоящая заметка посвящена вопросу об изменении во времени фраунгоферовой диффракционной картины, возникающей при прохождении плоской световой волны через среду слегка оптически-неоднородную, для случаев, когда неоднородности вызываются распространяющимися упругими возмущениями, либо когда среда состоит из различных компонент и неоднородность обусловливается различиями концентрации, выравнивающейся диффузией, либо, наконец, для случая непостоянной температуры, выравнивающейся теплопроводностью.

Подобный вопрос возникает при наблюдении по методу затемненного поля.

Мы обратимся сначала к первому случаю и предположим:

1) что изменение $\delta\mu$ показателя преломления обусловливается только изменением плотности $\delta\rho$ и пропорционально этому изменению; далее, что $\delta\mu$ настолько мало, что можно ограничиться рассмотрением членов с первой степенью $\delta\mu$.

2) что за время наблюдения возмущение заключено в ограниченной замкнутой области, целиком находящейся в поле зрения.

Пусть плоская волна распространяется в направлении оси X. Если линейные размеры области возмущения в этом направлении не слишком велики или, другими словами, если $\frac{\partial\delta\rho}{\rho\partial t}$ достаточно мало по сравнению с $\frac{c}{l}$, где c скорость света, а l линейный размер области возмущения,[1]) то диффракционную картину можно рассчитывать «статически», т. е., не учитывая тех изменений $\delta\rho$, которые произошли за время прохождения световой волны через область.

В настоящей заметке я ограничусь рассмотрением случаев, где такое предположение допустимо с достаточным приближением.

---

[1]) Это предполагает, что скорость звука очень мала по отношению к скорости света.

Обозначим через P комплексную амплитуду какой-нибудь составляющей светового вектора (магнитного или электрического) в точке очень отдаленной от области возмущения, расположенной в направлении $\overline{R}$, либо в точке фокальной плоскости линзы, соответствующей этому направлению. Мы получаем

$$P = A \int \delta\mu \cdot e^{ik(R-x)} d\tau,[1] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

где R расстояние элемента объема от какой-нибудь нормальной к направлению $\overline{R}$ плоскости, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ длина световой волны и A величина, которую при наших условиях можно считать постоянной.

Интегрирование распространяется согласно предположению 2) на область, целиком включающую область возмущения.

Для того, чтобы получить из (1) слагающую вектора Π, надо P помножить на $e^{i\nu t}$ и перейти, как обычно, к действительной части (ν частота светового колебания). Наша задача состоит в том, чтобы найти зависимость P или, вернее, квадрата действительной амплитуды, т.-е. интенсивности, от времени.

Заметим, что так как $\delta\mu$ пропорционально $\delta\rho$, а $\delta\rho$ подчиняется волновому уравнению, то для $\delta\mu$ справедливо:

$$\frac{\partial^2 \delta\mu}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 \delta\mu,[2] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

где a скорость звука в данной среде.

Продифференцировав (1) два раза по t, мы получим, благодаря (2)

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = Aa^2 \int \nabla^2 \delta\mu \, e^{ik(R-x)} d\tau \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Замечая, далее, что для любых двух функций, удовлетворяющих известным условиям непрерывности внутри замкнутой области, ограниченной поверхностью σ, справедливо:

$$\int (\nabla^2_\varphi \cdot \psi - \varphi \nabla^2_\psi) \, d\tau = \int \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) d\sigma \quad \ldots \ldots \ldots (4)$$

и, полагая $\varphi = \delta\mu$, $\psi = e^{ik(R-x)}$, мы получим, принимая во внимание, что по предположению 2) $\delta\mu$ и $\frac{\partial \delta\mu}{\partial n}$ на границе области равны 0:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = Aa^2 \int \nabla^2 \delta\mu \, . \, e^{ik(R-x)} d\tau \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

---

[1]) Lord Rayleigh. Scien; f. Papers V, 547.

[2]) Речь идет, таким образом, о возмущении каким-либо образом созданном и распространяющимся согласно уравнению (2).

Простым вычислением легко убедиться, что

$$\nabla^2 e^{ik(R-x)} = -4k^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2} e^{ik(R-x)},$$

где Θ угол, образованный направлением $\bar{R}$ с осью X.

Таким образом:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -4k^2 a^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2} A \int \delta\mu \,.\, e^{ik(R-x)} d\tau$$

или по (1)

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + m^2 P = 0, \text{ где } m = 2ak \sin\frac{\Theta}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Отсюда $P = C_1 e^{imt} + C_2 e^{-imt}$, а дополняя временным множителем $e^{i\nu t}$, получим:

$$\Pi = C_1 e^{i(m+\nu)t} + C_2 e^{i(\nu-m)t} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Действительная часть $Re(\Pi)$ выразится так:

$$Re(\Pi) = \sqrt{D^2 + D_1^2 \cos(2mt+\alpha)}\, \cos(\nu t + \chi) \quad \ldots\ldots (8)$$

где D, D_1, α постоянные, а χ медленно (m всегда мало по сравнению с ν) меняющаяся со временем фаза.

Отсюда интенсивность J рассеянного света

$$J = D^2 + D_1^2 \cos(2mt + \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

D, D_1 и α зависят от характера возмущения и от угла наблюдения, но не зависят от времени.

Мы получаем, таким образом, следующий результат.

При диффракции плоской световой волны, обусловливаемой возмущением, распространяющимся в неограниченной упругой среде, интенсивность света рассеянного в каком-нибудь определенном направлении меняется периодически по закону (9). Закон изменения не зависит от формы возмущения, а зависит исключительно от отношения скорости звука к скорости света, светового периода и от угла, образованного направлением наблюдения с направлением падающей волны. Полученный результат может быть интерпретирован несколько иначе.

Из (7) непосредственно вытекает следующее:

Рассеянный в каком-нибудь отличном от направления падающей монохроматической волны свет состоит из дублета; частота (циклическая) каждой компоненты отличается от частоты падающей волны на величину $\delta\nu$, где

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = \pm 2 \frac{a}{c} \sin\frac{\Theta}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

$\frac{\delta\nu}{\nu}$ зависит опять-таки исключительно от $\frac{a}{c}$ и от угла Θ.