ŋ̗dqdyeɣ bƐ dəqƐbɣʒe d ɛaɑɓɔɣ ɟdqdɣqɣè

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

Физико-математические науки

Математика

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Яндаров В.О., *кандидат физико-математических наук, профессор, советник ректора Грозненского государственного нефтяного технического университета им. академика М.Д. Миллионщикова*

О РАЗЛОЖИМОСТИ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ И НЕТОТАЛЬНОСТИ ИХ ПОДПРОСТРАНСТВ

В данной работе проанализирована разложимость банаховых пространств, нетотальность их подпространств, решена проблема Банаха.

Ключевые слова: *банахово пространство, дефлектор, тотализатор, сепарабельность.*

ON SEPARABILITY OF BANACH SPACES AND NON-TOTALITY OF THEIR SUBSPACES

In this article, we have analyzed separability of Banach spaces, non-totality of their subspaces, and have solved Banach problem.

Keywords: *Banach space, deflector, totalizer, separability.*

В основном в статье используется общепринятая терминология в функциональном анализе [1-7], а малоизвестная терминология объясняется ниже.

Пусть X_1 и X – бесконечномерные банаховы пространства над одним и тем же числовым полем, скажем, полем действительных чисел. Через X_1^* и X^* обозначаются банаховы пространства, сопряженные к X_1 и X соответственно. Символика $X_1\in E(X)$ обозначает, что банахово пространство X_1 слабо компактно и плотно вложено в такое же пространство X. Если $X_1\in E(X)$, то через $W_x(X_1)$ обозначается относительное пополнение X_1 относительно X [5], а через Z^* обозначается замыкание X^*, сопряженного к X, в пространстве X_1^*, сопряженном к X_1 (по норме). Замкнутое подпространство Y в X_1 (или в $W_x(X_1)$), которое обладает свойством: $W_x(Y)=W_x(X_1)$, обозначается символикой $Y\in(W)$ или, говорят, что Yобладает свойством (W). Нередко случается, что Z^* изометрически изоморфно сопряженному пространству или, что все равно, Z^* является сопряженным пространством к некоторому замкнутому подпространству $Y\subset X_1$. Например, если $X_1=C[0,1]$, $X=L_2[0,1]$ ($X_1\in E(X)$), то $Z^*=L_1[0,1]$. Как доказано И.М. Гельфандом [8], пространство $L_1[0,1]$ не является изометрически изоморфным сопряженному пространству. Если бы это было не так, то сопряженное $L_\infty[0,1]$ к $L_1[0,1]$ имело бы неприводимое подпространство $Y\subset C[0,1]$ такое, что $Y^*=L_1[0,1]$. Тогда по теореме 2 в [9] это означает, что Y-пространство Розенталя (обозначение: $Y\in(R)$) и пространство Y обладает свойством (W)[10]. Пространством Розенталя называется банахово пространство, которое не содержит подпространств, изоморфных ℓ_1. По теореме Розенталя [7] такие пространства X_1 обладают свойством: из каждой ограниченной последовательности $\{x_n\}\subset X_1$ можно выделить слабую подпоследовательность Коши $\{x_{n_k}\}$. Ра-

ŋ̗dqdyeɣ bƐ dəqƐbɣʒe d ɛaɑɓɔɣ ɟdqdɣqɣè

ŋqdbqуеҮ bɆ dəpƎbҮəɘ d ɐɔɐɓɔʎ Ɉqdbʏqуè

нее нами доказывалось, что это свойство равносильно свойству: в X_1 не существует бесконечномерного секвенциально слабо полного и нерефлексивного подпространства (замкнутого).

Если $X_1 \in E(X)$, то ненулевой линейный непрерывный функционал (элемент) $x^* \in X_1^*$ называется дефлектором в X_1^*, если его ядро (гиперподпространство) $Kerx^* \subset X_1$ обладает свойством (W): $W_x(Kerx^*)=W_x(X_1)$, а ненулевой линейный непрерывный функционал (элемент) $x^{**} \in X_1^{**}$, второе сопряженное к X_1 пространство, называется тотализатором в X_1^{**}, если его ядро $Kerx^{**} \subset X_1^*$ содержит пространство Z^*:$Kerx^{**} \supset Z^*$. Тотализатор $x^{**} \in X_1^{**}$, называется секвенциальным, если он является слабым (точнее, слабым*) пределом слабой (слабой*) последовательности Коши $\{x_n\} \subset X_1$.

Замкнутое подпространство $Y \subset X_1$ со свойством (W)($Y \in$(W)) называется наименьшим (минимальным) в X_1, если X_1 не содержит собственного замкнутого подпространства $Y_1 \subset Y$ со свойством (W). Будем предполагать, не умаляя общности, что наименьшее (минимальное) замкнутое подпространство $Y \subset X_1$ является таким же наименьшим (минимальным) и в $W_x(X_1)$. Наименьшее (минимальное) замкнутое подпространство в X_1 относительно других свойств банаховых (топологических) пространств называют неприводимыми относительно этих свойств, если их собственные замкнутые подпространства не обладают этим свойством [6, 11].

Замкнутое подпространство $Y \subset X_1^*$ называется нетотальным в X_1^*, если существует ненулевой элемент $x \in X_1$ такой, что $x^*(x)=0$ $\forall x^* \in Y$. Если последнее равенство выполняется для ненулевого элемента $x \in Y_0$ – подпространства в X_1, то говорят, что Y нетотально на Y_0. Совершенно очевидно, если $Y_0=X_1$, то $Y \subset X_1^*$ называется нетотальным на X_1. Нетотальные на X_1 подпространства в X_1^* – нетотальные в X_1^* подпространства в X_1^*.

С. Банах впервые ввел понятие регулярно замкнутого или слабо* замкнутого подпространства в X_1^*: замкнутое подпространство $L \subset X_1^*$ называется регулярно замкнутым в X_1^*, если для любого элемента $x^* \in X_1 \backslash L$ существует такой элемент $x_0 \in X_1$, что выполняются равенства

$$x^*(x_0)=1,\ z^*(x_0)=0,\ \forall z^* \in L. \tag{1}$$

Если равенства (1) выполняются при условии, что $x_0 \in W_x(X_1)$, то L называется квазирегулярно замкнутым в X_1^*[12-14].

Т е о р е м а 1. Пусть $X_1 \in E(X)$. Для того чтобы выполнялось равенство $X_1^*=Z^*$, необходимо и достаточно, чтобы для любого собственного замкнутого подпространства $Y \subset X_1$ и сопряженного к нему Y^* существовал ненулевой элемент $x_0 \in X_1 \backslash Y$ такой, что

$$x_0(y^*)=0\ \forall y^* \in Y^*. \tag{2}$$

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $X_1^*=Z^*$. Тогда по теореме 9 в [13] сопряженное Y^* к любому замкнутому подпространству $Y \subset X_1$ регулярно замкнуто в X_1^* и, следовательно, существует ненулевой элемент $x_0 \in X_1 \backslash Y$ такой, что $x_0(y^*)=0$ $\forall y^* \in Y^*$, т.е. выполняется равенство (2).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполняется равенство (2) для сопряженного Y^* к любому замкнутому подпространству $Y \subset X_1$. Предположим, что существует дефлектор $x^* \in X_1^* \backslash Z^*$, т.е. $Kerx^* \in$(W):$W_x(Kerx^*)=W_x(X_1)$. По условию доказываемого утверждения для $Y=Kerx^*$ и сопряженного к нему Y^* существует ненулевой элемент $x_0 \in X_1 \backslash Y$ такой, что выполняется равенство (2). Так как $Y \subset X_1$, то, переходя к сопряженным пространствам, будем иметь включение: $X_1^* \subset Y^*$. Хорошо известно [10], что всегда $Z^* \subset X_1^*$. Тогда из предыдущего и последнего включений следует, что $Z^* \subset Y^*$. Отсюда следует, что в равенстве (2) x_0-нуль-элемент, а

ŋqdbqуеҮ bɆ dəpƎbҮəɘ d ɐɔɐɓɔʎ Ɉqdbʏqуè

ŋqdqyəʏ bɆ dəqƐbʏəɘ d ɐɔɐqɔʏ ʒqdqʏqʏè

это противоречит условию доказываемого утверждения. Следовательно, предположение о существовании дефлекторов не верно.

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Пусть $X_1 \in E(X)$. Для того чтобы X_1^* и X_1^{**} не содержали соответственно дефлекторов и тотализаторов, необходимо и достаточно, чтобы для любого собственного замкнутого подпространства $Y \subset X_1$, его сопряженное Y^* было не тотально на X_1, т.е. чтобы Y^* было нетотальным подпространством в X_1^*.

Доказательство следствия 1 основано на результатах автора в [13-15].

Ранее были автором доказаны формулы [16]:

$$X_1^* = Z^* \oplus Y^{\perp}(X_1^*), \tag{3}$$

$$X_1^{**} = Z^{**} \oplus Z^{*\perp}(X_1^{**}), \tag{4}$$

где $Y^{\perp}$ и $Z^{*\perp}$ – аннуляторы $Y \subset X_1$ и Z^* соответственно в пространствах X_1^* и X_1^{**}, $Z^*=Y^*$ – сопряженное к $Y \subset X_1$ пространство, $Z^{**}=W_x(X_1)$, а $X_1 \in (R)$ [5,15,16]. На основании (3) и (4), а также на основании предложения 1 в [16] имеет место равенство:

$$(Y^{\perp}(X_1^*))^* = Z^{*\perp}(X_1^{**}), \tag{5}$$

которое равносильно равенству $Z^*=Y^*$ – сопряженное к Y пространство, где $Y \subset X_1$ и $Y \in (W)$. Как было отмечено в [16], пространства (банаховы) $Y^{\perp}$ и $Z^{*\perp}$ являются пространствами всех чистых дефлекторов в X_1^* и всех чистых тотализаторов в X_1^{**} соответственно. Из равенства (5) следует, что пространство $Z^{*\perp}$ всех чистых тотализаторов в X_1^{**} является сопряженным пространством к пространству $Y^{\perp}$ всех чистых дефлекторов в X_1^*. Если $X_1 \in (R)$, т.е. если X_1 – пространство Розенталя или X_1 не содержит подпространств, изоморфных ℓ_1, и, кроме того, X_1 сепарабельно, то сопряженное к X_1 пространство сепарабельно (проблема С. Банаха впервые правильно была решена автором [9, 16]). Содержание фундаментальной проблемы С. Банаха следующее [9]: если сепарабельное банахово пространство X_1 имеет несепарабельное сопряженное X_1^*, то содержит ли X_1 подпространство, изоморфное ℓ_1? Мы дадим здесь также положительное решение этой проблемы, несколько по-другому, чем в [9].

Т е о р е м а 2. Пусть X_1 сепарабельно и $X_1 \in E(X)$. Для того чтобы X_1 не содержало подпространств, изоморфных ℓ_1, необходимо и достаточно, чтобы сопряженное к X_1 пространство X_1^* было сепарабельно.

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Ранее нами была доказана теорема 11 в [16]: Пусть $X_1 \in E(X)$ и $X_1 \in (R)$. Тогда для каждого дефлектора $x_0^* \in X_1^*$ может быть построен секвенциальный тотализатор $x^{**} \in X_1^{**}$ по формуле

$$x^{**} = x_0 - (\text{w-}\lim_n x_n), \tag{6}$$

где $(\text{w-}\lim_n x_n)$ – слабый предел слабой последовательности Коши $\{x_n\} \subset \mathrm{Ker}\,x_0^*$, сходящейся в топологии $\sigma(X_1, Z^*)$ к $x_0 \in X_1$, $x_0 \notin \mathrm{Ker}\,x_0^*$ и $x_0^*(x_0)=x^{**}(x_0^*)=1$. Так как $X_1 \in (R)$, то по теореме 10 в [16] и теореме Оделя и Розенталя [7] каждый тотализатор будет секвенциальным. По теореме 5 в [15] Z^* изометрически изоморфно сопряженному пространству, т.е. выполняется равенство: $Y^*=Z^*$, где Y – некоторое замкнутое подпространство в X_1 со свойством (W). Из сепарабельности X_1 вытекает, что в X_1 существует счетное всюду плотное в X_1 множество

ŋqdqyəʏ bɆ dəqƐbʏəɘ d ɐɔɐqɔʏ ʒqdqʏqʏè